

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ЛИНЕЙНОГО АГРЕГИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА

В. Л. ВЕН

(Москва)

Размерность динамической межотраслевой модели определяется в первую очередь числом отраслей, на которое разбита описываемая экономическая система согласно принятой в модели классификации. Это число может выбираться в достаточной мере произвольно, но при малом числе отраслей возрастают ошибки, связанные с вычислением коэффициентов, в то время как увеличение числа отраслей встречает значительные вычислительные трудности при практическом использовании модели. Преодоление противоречия между обеспечением заданной точности получаемых результатов и необходимостью уменьшения размерности модели является одной из проблем агрегирования. Агрегирование применительно к схемам межотраслевого баланса или к анализу «затраты — выпуск» достаточно хорошо изучено. В качестве примера можно привести работы [1—10], более подробный список литературы содержится, например, в [11].

Рассматриваемый в настоящей работе метод линейного агрегирования основан на использовании условия совместности [1] для вычисления коэффициентов модели меньшей размерности (агрегированной модели). Для агрегирования части уравнений динамической модели используется более слабая форма условий совместности*, что может привести к появлению ошибок в результатах, получаемых при расчетах на агрегированной модели. Однако эти ошибки компенсируются значительным выигрышем в числе операций, облегчением восприятия результатов расчетов, а также возможностью представить полученные на агрегированной модели результаты в терминах переменных исходной модели. Кроме того, последовательное применение операции агрегирования позволяет построить многоступенчатую систему моделей, которые могут использоваться на различных уровнях иерархической структуры управления.

1. ОПИСАНИЕ ИСХОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА

Простейший вариант динамической межотраслевой модели состоит из собственно уравнения межотраслевого баланса, уравнения, связывающего инвестиции и прирост производственных мощностей, и соотношения, ограничивающего полный выпуск имеющимися на данный момент времени производственными мощностями**. В матричной записи эта модель имеет

* Эта форма предложена в [12], где рассмотрено также агрегирование простейшей динамической модели межотраслевого баланса. Настоящая статья является развитием [12].

** Понятие производственной мощности, как оно определено в [13], «относится к максимуму продукции, которую данная отрасль может произвести при полном использовании факторов, связанных с основными фондами».

вид

$$\begin{aligned} X(t) &= AX(t) + I(t) + Y(t), \\ I(t) &= B[\xi(t+1) - \xi(t)], \quad t = 1, 2, \dots, \\ X(t) &\leq \xi(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где $X(t)$, $I(t)$, $Y(t)$ и $\xi(t)$ — соответственно n -мерные векторы полного выпуска, инвестиционных затрат, конечного спроса и производственных мощностей в году t ; A и B — матрицы порядка n коэффициентов прямых материальных затрат и коэффициентов материальных затрат на расширение производства. В этой модели время строительства и освоения новых мощностей равно одному году, а отсутствие переменной, характеризую-

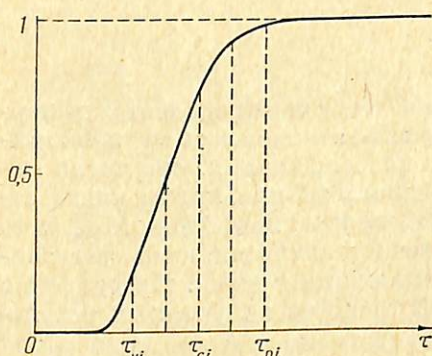


Рис. 1. Зависимость от времени степени освоения задельной мощности

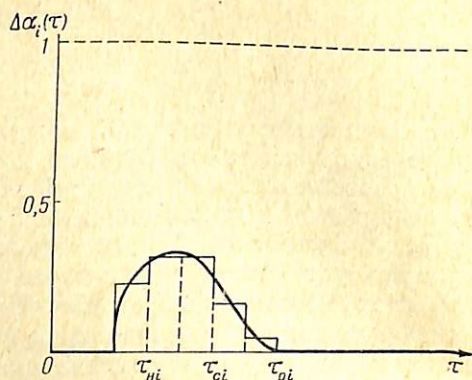


Рис. 2. Коэффициенты приращения эффективной мощности строящихся предприятий

щей запасы готовой продукции, приводит к тому, что весь свободный продукт используется для инвестиций.

Более сложные варианты динамических межотраслевых моделей отличаются тем, что позволяют учесть: а) наличие переходящих из года в год запасов готовой продукции; б) больший, чем один год, период строительства новых мощностей (строительный лаг); в) постепенное наращивание мощностей вводимых объектов; г) возможность перестройки (конверсии) производства для выпуска другого вида продукции; д) зависимость коэффициентов модели от времени (учет технического прогресса).

Динамическая межотраслевая модель, представляющая собой один из вариантов усложнения модели (1) и учитывающая все перечисленные факторы, описана в [14]. Ниже дано матричное описание модели, отличающейся от модели, приведенной в [14], только способом учета зависимости коэффициентов модели от времени.

а) Отказ от предположения, что весь конечный продукт используется для инвестиций и удовлетворения конечного спроса, приводит к появлению нового слагаемого в уравнении баланса

$$X(t) = AX(t) + I(t) + Y(t) + \Delta Z(t+1).$$

Здесь $\Delta Z(t+1) = Z(t+1) - Z(t)$, а $Z(t) = \|z_i(t)\|_1^n$ — вектор запасов в году t , причем $Z(t) \geq 0$, $t = 1, 2, \dots$.

б) Максимальное время строительства новой мощности равно τ_c (на всем протяжении строительства и освоения эту новую мощность будем называть задельной). Введем матрицы: $B(\tau) = \|b_{ij}(\tau)\|_1^n$, $\tau = 1, 2, \dots, \tau_c$, где $b_{ij}(\tau)$ — коэффициент материальных затрат i -го вида продукции на прост единицы мощности в j -й отрасли на τ -м шаге создания. Если для

отрасли i время строительства новых мощностей $\tau_{ci} < \tau_c$, то коэффициенты $b_{ij}(\tau)$ при $\tau_{ci} < \tau \leq \tau_c$ полагаются равными нулю. Обозначим через $\theta(t) = \|\vartheta_i(t)\|_1^n$ — вектор мощностей, создание которых началось в году t , тогда полные затраты на создание новых мощностей в году t составят

$$I_c(t) = \sum_{\tau=1}^{\tau_c} B(\tau) \theta(t - \tau + 1). \quad (2)$$

в) Процесс ввода в строй новых мощностей протекает следующим образом: при $\tau = \tau_{ni}$ с начала создания вводится в строй первая очередь объекта, а при $\tau = \tau_{pi}$ его мощность достигает расчетной.

На рис. 1 изображен примерный график функции $a_i(\tau)$, описывающей зависимость от времени степени освоения задельной мощности. Заменим производную от этой функции ступенчатой функцией, вводя коэффициенты $\Delta a_i(\tau)$ приращения эффективной мощности строящихся предприятий в τ -м году строительства (рис. 2). Используя

$$\tau_n = \min_i \tau_{ni} \text{ и } \tau_p = \max_i \tau_{pi},$$

прирост мощности в году t можно выразить формулой

$$\Delta \xi_c(t) = \sum_{\tau=\tau_n}^{\tau_p} \Delta \hat{a}(\tau) \theta(t - \tau + 1), \quad (3)$$

где $\Delta \hat{a}(\tau) = \|\delta_{ij} \Delta a_i(\tau)\|_{i,j}^n = 1$ — диагональная матрица.

г) Конверсия действующих мощностей вводится аналогично строительству новых. Введем обозначения: $\mu_{ij}(t)$ — производственная мощность, конвертируемая из отрасли i в отрасль j в году t (в году $t - 1$ она продолжает выпускать продукцию отрасли i); $\mu_i(t) = \|\mu_{ij}(t)\|_{j=1}^n$, $i = 1, 2, \dots, n$ — векторы, задающие мощности, конвертируемые из отрасли номера i ;

$$\bar{\mu}(t) = \begin{pmatrix} \mu_1(t) \\ \mu_2(t) \\ \vdots \\ \mu_n(t) \end{pmatrix} \text{ — вектор размерности } n^2, \text{ задающий все конвертируемые в году } t \text{ мощности;}$$

τ_n — максимальная продолжительность конверсии; $\Delta a_{ij}(\tau)$ — коэффициент приращения эффективной мощности на τ -м году перестройки предприятия с выпуска продукции i -й отрасли на выпуск продукции j -й отрасли; $\Delta \hat{a}_i(\tau) = \|\delta_{jk} \Delta a_{ij}(\tau)\|_{j,k=1}^n$, $i = 1, 2, \dots, n$ — диагональные матрицы размера $n \times n$; κ_{ij} — мощность отрасли j , которая получается в результате конверсии единицы мощности i -й отрасли; $\kappa_i = \|\delta_{jk} \kappa_{ij}\|_{j,k=1}^n$, $i = 1, 2, \dots, n$ — диагональные матрицы размера $n \times n$; $\bar{\Delta a}(\tau) \kappa = \|\Delta \hat{a}_1(\tau) \kappa_1 \Delta \hat{a}_2(\tau) \kappa_2 \dots \Delta \hat{a}_n(\tau) \kappa_n\|$ матрица размера $n \times n^2$; $b_{ijk}(\tau)$ — материальные затраты по k -му виду продукции на единицу конвертируемой мощности в τ -м году конверсии из отрасли i в отрасль j ; $B_i(\tau) = \|b_{ijk}(\tau)\|_{j,k=1}^n$ — матрица размера $n \times n$, задающая удельные материальные затраты на конверсию из i -й отрасли; $\bar{B}(\tau) = \|B_1(\tau) B_2(\tau) \dots B_n(\tau)\|$ — матрица размера $n \times n^2$;

$$\bar{e}_n = \begin{pmatrix} 11 \dots 1 & 00 \dots 0 & \dots & 00 \dots 0 \\ 00 \dots 0 & 11 \dots 1 & \dots & 00 \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 00 \dots 0 & 00 \dots 0 & \dots & 11 \dots 1 \end{pmatrix} \text{ — матрица размера } n \times n^2.$$

В соответствии с этими обозначениями материальные затраты на конверсию в году t составят

$$I_k(t) = \sum_{\tau=1}^{\tau_k} \bar{B}(\tau) \bar{\mu}(t - \tau + 1), \quad (4)$$

а прирост мощностей в году t в результате конверсии

$$\Delta \xi_k(t) = \sum_{\tau=1}^{\tau_k} \overline{\Delta \alpha(\tau) \kappa} \bar{\mu}(t - \tau + 1) - \bar{e}_n \bar{\mu}(t). \quad (5)$$

Объединяя выписанные соотношения, получим динамическую межотраслевую модель, описывающую развитие и перестройку промышленности без учета влияния технического прогресса на коэффициенты модели

$$\begin{aligned} X(t) &= AX(t) + I(t) + Y(t) + \Delta Z(t+1), \\ Z(t+1) &= Z(t) + \Delta Z(t+1), \end{aligned}$$

$$I(t) = \sum_{\tau=1}^{\tau_c} B(\tau) \theta(t - \tau + 1) + \sum_{\tau=1}^{\tau_k} \bar{B}(\tau) \bar{\mu}(t - \tau + 1),$$

$$\Delta \xi(t) = \sum_{\tau=\tau_n}^{\tau_p} \Delta \hat{\alpha}(\tau) \theta(t - \tau + 1) + \sum_{\tau=1}^{\tau_k} \overline{\Delta \alpha(\tau) \kappa} \bar{\mu}(t - \tau + 1) - \bar{e}_n \bar{\mu}(t), \quad (6)$$

$$\xi(t) = \xi(t-1) + \Delta \xi(t),$$

$$X(t) \leq \xi(t),$$

$$X(t) \geq 0, \quad \theta(t) \geq 0, \quad \bar{\mu}(t) \geq 0, \quad Z(t) \geq 0,$$

$$t = 1, 2, \dots$$

д) Изменение коэффициентов модели от времени определяется структурой отрасли. Каждая отрасль представляется как линейная комбинация организационно-технологических способов. Для уже производящихся продуктов это осуществляется простым расширением матриц коэффициентов, а для вновь возникающих производств — с помощью создания фиктивных отраслей, которые с самого начала учитываются в модели. Каждая отрасль, выделяемая в межотраслевом балансе, представляет собой совокупность производственных процессов, выпускающих однородный продукт. Однако такие показатели, как производительность труда, нормы расхода сырья, среднегодовой износ оборудования, расход электроэнергии и т. д. могут значительно различаться для разных предприятий. Таким образом, отрасль, фигурирующая в межотраслевом балансе, внутренне не является достаточно однородной. В самой этой отрасли можно выделить наиболее передовые предприятия с высокими производственными показателями. Разделение отрасли на отдельные группы по производственным показателям представляет собой один из методов выделения организационно-технологических способов.

Пусть $s = 1, 2, \dots, S$ — номер организационно-технологического способа. Для каждого из этих способов построим описанную выше модель, помечая переменные и коэффициенты верхним индексом s . Предполагается, что модели, относящиеся к различным организационно-технологическим способам, имеют одинаковую классификацию отраслей в межотраслевом

балансе. В случае отсутствия производственных мощностей i -й отрасли в модели s -го организационно-технологического способа на всем протяжении планируемого периода эта отрасль формально вводится в модель с нулевым значением производственной мощности ($\xi_i^s = 0$).

Все организационно-технологические способы участвуют в выпуске конечного продукта $I(t) + Y(t) + \Delta Z(t+1)$, причем конечная продукция, произведенная одним способом, не отличается от конечной продукции любого другого способа, т. е.

$$Y(t) = \sum_{s=1}^S Y^s(t), \quad I(t) = \sum_{s=1}^S I^s(t),$$

$$Z(t) = \sum_{s=1}^S Z^s(t), \quad t = 1, 2, \dots$$

С учетом возможности линейных комбинаций организационно-технологических способов (6) принимает вид, который и будет принят за исходный при построении агрегированной модели,

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^S X^s(t) &= \sum_{s=1}^S A^s X^s(t) + I(t) + Y(t) + \Delta Z(t+1), \\ Z(t+1) &= Z(t) + \Delta Z(t+1), \\ I(t) &= \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=1}^{\tau_c^s} B^s(\tau) \theta^s(t-\tau+1) + \sum_{r,s=1}^S \sum_{\tau=1}^{\tau_k^{rs}} \bar{B}^{rs}(\tau) \bar{\mu}^{rs}(t-\tau+1), \\ \Delta \xi^s(t) &= \sum_{\tau=\tau_H^s}^{\tau_P^s} \Delta \hat{x}^s(\tau) \theta^s(t-\tau+1) + \\ &+ \sum_{r=1}^S \left[\sum_{\tau=1}^{\tau_k^{rs}} \overline{\Delta \alpha^{rs}(\tau) \kappa^{rs} \bar{\mu}^{rs}}(t-\tau+1) - \bar{e}_n \bar{\mu}^{rs}(t) \right], \\ \xi^s(t) &= \xi^s(t-1) + \Delta \xi^s(t), \\ X^s(t) &\leq \xi^s(t), \\ X^s(t) \geq 0, \quad \theta^s(t) \geq 0, \quad \bar{\mu}^{rs}(t) \geq 0, \quad Z(t) \geq 0, \\ r, s &= 1, 2, \dots, S, \quad t = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7)$$

В (7) разрешается конверсия мощностей не только из отрасли в отрасль, но и из одного организационно-технологического способа в другой. Коэффициенты $b_{ijk}^{rs}(\tau)$, $\Delta \alpha_{ij}^{rs}(\tau)$, κ_{ij}^{rs} и величины $\bar{\mu}_{ij}^{rs}(t)$ характеризуют соответственно материальные затраты, приращения эффективной мощности, соотношения мощностей до и после конверсии и объемы мощностей, относящихся к r -му организационно-технологическому способу, которые конвертируются из отрасли i в мощности отрасли j , относящиеся к s -му организационно-технологическому способу. Конверсия $i \rightarrow j$, $r \rightarrow s$ соответствует модернизации мощностей i -й отрасли.

В модели (7) все соотношения, описывающие изменения мощностей и ограничения по мощностям, выписаны отдельно для каждого организационно-технологического способа s , $s = 1, 2, \dots, S$. Это позволяет учесть изменения структуры отдельных отраслей и всей промышленности в це-

лом с течением времени. В процессе перестройки и развития промышленности мощности, относящиеся к устаревшим организационно-технологическим способам, модернизируются, а среди строящихся преобладают мощности, относящиеся к наиболее совершенным и экономичным организационно-технологическим способам.

2. АГРЕГИРОВАНИЕ ПРОСТЕЙШЕЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Агрегирование простейшей динамической модели межотраслевого баланса (1) подробно рассмотрено в [12]. При агрегировании этой модели последнее соотношение, являющееся моделью производственных возможностей, заменяется линейной моделью, описанной в [15]. Новая модель производственных возможностей может быть представлена набором из m ($m < n$) линейных ограничений или в матричном виде

$$CX(t) \leq \pi(t), \quad t = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

где C — прямоугольная матрица размера $m \times n$; $\pi(t)$ — m -мерный вектор агрегированных мощностей.

Каждое ограничение модели (8) описывает производственные возможности одной технологической отрасли. Как определено в [15], технологическая отрасль представляет собой объединение производственных мощностей, специализирующееся в выпуске некоторого, только ему присущего ассортимента продукции, причем, с одной стороны, это объединение не может быть разбито на части, выпускающие непересекающиеся ассортименты продукции, а с другой стороны, производственные мощности, не входящие в объединение, не могут выпускать ни один вид продукции из ассортимента данного объединения. Ненулевые элементы i -й строки матрицы C указывают на производимые i -й технологической отраслью виды продукции, поэтому если изменить нумерацию видов продукции так, чтобы продукция с первыми номерами выпускалась первой технологической отраслью, со следующими номерами — второй и т. д., то матрицу C можно представить в виде произведения

$$C = C^0 F \quad (9)$$

некоторой неособенной диагональной матрицы F порядка n и агрегирующей [7] матрицы C^0 размера $m \times n$. Предполагается, что обе модели производственных возможностей согласованы, т. е.

$$C^0 \xi(t) = \pi(t). \quad (10)$$

Введем агрегированные переменные размерности m

$$P(t) = CX(t), \quad J(t) = DI(t), \quad R(t) = DY(t),$$

которые будем далее называть соответственно векторами агрегированного полного выпуска, агрегированных инвестиций и агрегированного конечного спроса в году t , и выпишем агрегированный аналог простейшей динамической модели в этих переменных

$$\begin{aligned} P(t) &= QP(t) + J(t) + R(t), \\ J(t) &= H[\pi(t+1) - \pi(t)], \quad t = 1, 2, \dots, \\ P(t) &\leq \pi(t). \end{aligned} \quad (11)$$

Последнее соотношение (11) представляет собой модель (8), поэтому для построения агрегированной модели нужно найти агрегированные аналоги Q и H размерности m для матриц A и B . Для вычисления матрицы Q

можно воспользоваться аппаратом биматричного агрегирования, разработанным в [10] для статического уравнения межотраслевого баланса. Биматричное агрегирование основано на использовании условия совместности

$$(E - Q)C = D(E - A), \quad (12)$$

рассматриваемого как матричное уравнение относительно $E - Q$. Если матрица D вычислена из условия разрешимости уравнения (12), то решение имеет вид: $E - Q = D(E - A)C^+$, где $C^+ = n \times m$ — матрица, псевдообратная [16] для C . Биматричное агрегирование позволяет осуществить обратный переход от решения, полученного из агрегированного статического уравнения, к точному решению исходного статического уравнения

$$X(t) = [E - wW^0(E - A)]C^+P(t) + wW^0[I(t) + Y(t)]. \quad (13)$$

Здесь w — правая матрица скелетного разложения матрицы $E - C^+C$; W^0 — матрица, задающая частное решение уравнения, образованного из условия разрешимости (более подробно о вычислении матрицы W^0 см. [10]).

Для вычисления матрицы H нельзя воспользоваться биматричным агрегированием, потому что обе матрицы, задающие связь между исходными и агрегированными переменными, уже зафиксированы: D из условия разрешимости уравнения (12), а C из условия согласованности (10). В [12] введено понятие условия совместности на подпространстве

$$H\Lambda = D\Lambda. \quad (14)$$

(14) соответствует выполнению обычного условия совместности на подпространстве L_Λ , в которое отображает все пространство L_n вырожденный линейный оператор, задаваемый матрицей Λ .

Для того чтобы воспользоваться условиями совместности на подпространстве L_Λ при построении системы агрегирования для второго уравнения модели (1), наложим на переменную $\xi(t)$ условие неизменности структуры внутри технологических отраслей. Оператор Λ , который отображает L_n в подпространство с неизменной внутри технологических отраслей структурой, задается матрицей

$$\Lambda = (\hat{\pi}^{-1}C^0\hat{\xi})'C, \quad (15)$$

где ξ и π — соответственно производственные и агрегированные мощности в начальный момент времени, $\pi = C\xi$; C^0 — агрегирующая матрица из произведения (9), а крышка обозначает диагональную матрицу, образованную от соответствующего вектора.

Теорема 1. Если

$$H = DB(\hat{\pi}^{-1}C^0\hat{\xi})', \quad (16)$$

то система агрегирования

$$\begin{aligned} \pi(t+1) - \pi(t) &= C[\xi(t+1) - \xi(t)], \\ J(t) &= DI(t), \quad J(t) = H[\pi(t+1) - \pi(t)] \end{aligned}$$

для исходного уравнения

$$I(t) = B[\xi(t+1) - \xi(t)]$$

является совместной на подпространстве L_Λ .

Доказательство. Перепишем условие совместности этой системы агрегирования на подпространстве L_Λ (см. (14)), используя (15) и (16): $DB\Lambda^2 = D\Lambda$. Покажем, что $\Lambda^2 = \Lambda$. По определению вектора π : $\pi = C\xi$,

следовательно, $\hat{\pi} = C\hat{\xi}(C^0)'$. Используя это соотношение, преобразуем выражение для Λ^2

$$\Lambda^2 = (\hat{\pi}^{-1}C^0\hat{\xi})' C (\hat{\pi}^{-1}C^0\hat{\xi})' C = (\hat{\pi}^{-1}C^0\hat{\xi})' C\hat{\xi}(C^0)' \hat{\pi}^{-1}C = (\hat{\pi}^{-1}C^0\hat{\xi})' \hat{\pi}^{-1}C = \Lambda.$$

Теорема доказана.

Для систем агрегирования, удовлетворяющих условию типа (14), можно осуществить дезагрегирование результатов расчетов в то подпространство переменных, на котором выполнено обычное условие совместности

$$\xi(t+1) - \xi(t) = (\hat{\pi}^{-1}C^0\hat{\xi})' [\pi(t+1) - \pi(t)]. \quad (17)$$

Дезагрегированные инвестиции вычисляются из соотношений исходной модели (1). Доказательство того, что $C[\xi(t+1) - \xi(t)] = \pi(t+1) - \pi(t)$ выполняется аналогично доказательству предыдущей теоремы

$$C(\hat{\pi}^{-1}C^0\hat{\xi})' = C\hat{\xi}(C^0)' \hat{\pi}^{-1} = \hat{\pi}\hat{\pi}^{-1} = E.$$

Агрегированная динамическая модель (11) позволяет выполнять расчеты и получать дезагрегированные результаты с ошибкой только в «тонкой структуре» производственных мощностей внутри технологических отраслей. Баланс между дезагрегированными отраслями выполняется при этом точно.

3. АГРЕГИРОВАННАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ С УЧЕТОМ ЗАПАСОВ, СТРОИТЕЛЬНОГО ЛАГА И КОНВЕРСИИ

В силу линейности оператора, связывающего конечные выпуски в исходной и агрегированной моделях, в уравнение баланса модели (11) можно включить еще один член: $\Delta\Omega(t+1) = D\Delta Z(t+1)$, который характеризует изменение уровня агрегированных запасов $\Omega(t) = \|\omega_i(t)\|_1^m$

$$\Delta\Omega(t+1) = \Omega(t+1) - \Omega(t).$$

Таким образом, учет переходящих из года в год запасов в агрегированной модели не отличается от учета запасов в исходной модели. Однако чтобы условие неотрицательности агрегированных запасов имело смысл, необходимо исключить произвол в определении матрицы D . Как следует из [10], матрица D может быть вычислена с точностью до умножения на произвольную неособенную матрицу d порядка m . Будем вычислять матрицу d из условия максимальной близости D к матрице C^0 в смысле матричной нормы

$$\|D\|^2 = \text{tr} \{D'D\} = \sum_{i,j} d_{ij}^2. \quad (18)$$

В [17] показано, что наилучшим приближенным решением уравнения $dD^0 = C^0$ в смысле матричной нормы (18) является

$$d = C^0(D^0)^+. \quad (19)$$

Заметим, что такая конкретизация матрицы D ($D = C^0(D^0)^+ D^0$) даже в том случае, когда $D = C^0$ не позволяет сделать вывод о полной адекватности условий $Z(t) \geq 0$ и $\Omega(t) \geq 0$. Однако при отсутствии дополнительной информации о связях между компонентами вектора $Z(t)$ замена условия неотрицательности компонент вектора $Z(t)$ условием неотрицательности сумм этих компонент по m непересекающимся подмножествам индексов при линейном агрегировании наиболее естественна.

Обозначим через $\rho(t) = C\theta(t)$ m -мерный вектор агрегированных мощностей, создание которых началось в году t . При построении системы агрегирования для уравнения (2) затрат на строительство новых мощностей оказываются заранее зафиксированными обе матрицы агрегирования, поэтому здесь, как и в случае простейшей модели, следует воспользоваться условиями совместности на подпространстве L_Λ . Пусть вектор θ задает структуру задельных мощностей внутри технологических отраслей, а $\rho = C\theta$, тогда, применяя теорему 1 к каждому члену суммы в уравнении (2), можно сделать вывод о том, что при $H(\tau) = DB(\tau)(\hat{\rho}^{-1}C^0\hat{\theta})'$, $\tau = 1, 2, \dots, \tau_c$, система агрегирования

$$\rho(t) = C\theta(t), \quad J_c(t) = DI_c(t),$$

$$J_c(t) = \sum_{\tau=1}^{\tau_c} H(\tau) \rho(t - \tau + 1)$$

для исходного уравнения (2) является совместной на подпространстве L_Λ , которое задается оператором Λ с $\Lambda = (\hat{\rho}^{-1}C^0\hat{\theta})'C$.

Наложенное на вектор задельных мощностей $\theta(t)$ условие неизменности структуры внутри технологических отраслей позволяет воспользоваться условием совместности системы агрегирования на подпространстве L_Λ и для нахождения диагональных порядка m матриц $\Delta\hat{\beta}(\tau)$, $\tau = \tau_n, \tau_n + 1, \dots, \tau_p$, которые задают коэффициенты приращенния агрегированных мощностей $\Delta\pi_c(t)$ на различных годах освоения агрегированных задельных мощностей $\rho(t)$. Проводя рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 1, можно доказать, что матрицы $\Delta\hat{\beta}(\tau)$, $\tau = \tau_n, \tau_n + 1, \dots, \tau_p$, совместной на подпространстве L_Λ системы агрегирования

$$\rho(t) = C\theta(t),$$

$$\Delta\pi_c(t) = C\Delta\xi_c(t),$$

$$\Delta\pi_c(t) = \sum_{\tau=\tau_n}^{\tau_p} \Delta\hat{\beta}(\tau) \rho(t - \tau + 1)$$

для исходного уравнения (3) вычисляются по формулам

$$\Delta\hat{\beta}(\tau) = C\Delta\hat{\alpha}(\tau)(\hat{\rho}^{-1}C^0\hat{\theta})', \quad \tau = \tau_n, \tau_n + 1, \dots, \tau_p.$$

Конверсия агрегированных мощностей вводится в модель аналогично строительству новых. Однако для агрегирования вектора конвертируемых мощностей $\bar{\mu}(t)$ размера n^2 необходимо ввести матрицу $\bar{C}$ размера $m^2 \times n^2$, которая составлена из матриц C , расположенных в таком же порядке, как ненулевые элементы в C

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} CC \dots C & 00 \dots 0 & \dots & 00 \dots 0 \\ 00 \dots 0 & CC \dots C & \dots & 00 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 00 \dots 0 & 00 \dots 0 & \dots & CC \dots C \end{bmatrix}.$$

Матрица $\bar{C}$, как и C , может быть представлена в виде произведения

$$\bar{C} = \bar{C}^0 \bar{F} \quad (20)$$

матрицы $\bar{C}^0$ размера $m^2 \times n^2$, образованной из матриц C^0 , расположенных

в том же порядке, как единицы в S^0 и диагональной матрицы $\bar{F}$ порядка n^2

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} F & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\bar{\sigma}(t) = \bar{C}\bar{\mu}(t)$ m^2 -мерный вектор конвертируемых в году t агрегированных мощностей. Вектор $\bar{\sigma}(t)$, как и $\bar{\mu}(t)$, образован из m векторов $\sigma_i(t)$ размерности m , задающих агрегированные мощности i -й технологической отрасли, конвертируемые в году t .

Выпишем систему агрегирования для уравнения затрат на конверсию (4)

$$\bar{\sigma}(t) = \bar{C}\bar{\mu}(t), \quad J_{\kappa}(t) = DI_{\kappa}(t), \quad J_{\kappa}(t) = \sum_{\tau=1}^{\tau_{\kappa}} \bar{H}(\tau) \bar{\sigma}(t - \tau + 1). \quad (21)$$

Обе матрицы агрегирования фиксированы. Следовательно, для построения совместной системы нужно наложить ограничения на структуру вектора $\bar{\mu}(t)$. Предположим, что структура объемов конверсии мощностей, принадлежащих одной технологической отрасли, в мощности, принадлежащие другой технологической отрасли, фиксирована. Обозначим через $\bar{\mu}$ вектор, задающий эту структуру. Тогда все векторы конвертируемых мощностей $\bar{\mu}(t)$, имеющие ту же структуру внутри технологических отраслей, могут быть представлены в виде

$$\bar{\mu}(t) = (\hat{v}^{-1} \bar{C}^0 \hat{\mu})' \bar{C} \bar{\chi},$$

где $\bar{\chi} \in L_{n^2}$ — произвольный вектор, $\hat{v} = \bar{C}\bar{\mu}$, $\bar{C}^0$ — матрица из произведения (20).

В предположении неизменности вектора $\bar{\mu}(t)$ внутри технологических отраслей для построения системы агрегирования (21) можно воспользоваться условиями совместности на подпространстве L_{Λ} . Только в качестве Λ здесь нужно выбрать оператор, задаваемый матрицей

$$\bar{\Lambda} = (\hat{v}^{-1} \bar{C}^0 \hat{\mu})' \bar{C}. \quad (22)$$

Теорема 2. Если

$$\bar{H}(\tau) = D\bar{B}(\tau) (\hat{v}^{-1} \bar{C}^0 \hat{\mu})', \quad \tau = 1, 2, \dots, \tau_{\kappa},$$

то система агрегирования (21) для исходного уравнения (4) совместна на подпространстве L_{Λ} .

Доказательство утверждения теоремы сводится к доказательству совместности на подпространстве L_{Λ} систем агрегирования для каждого члена суммы по τ , т. е. для исходных уравнений

$$I_{\kappa\tau}(t) = \bar{B}(\tau) \bar{\mu}(t - \tau + 1)^*, \quad \tau = 1, 2, \dots, \tau_{\kappa}$$

и систем агрегирования

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(t) &= \bar{C}\bar{\mu}(t), \\ J_{\kappa\tau}(t) &= DI_{\kappa\tau}(t), \quad \tau = 1, 2, \dots, \tau_{\kappa}, \\ J_{\kappa\tau}(t) &= \bar{H}(\tau) \bar{\sigma}(t - \tau + 1), \end{aligned}$$

что может быть выполнено аналогично доказательству теоремы 1.

* Через $I_{\kappa\tau}(t)$ здесь обозначен вектор материальных затрат в t -м году на конверсию мощностей, которая была начата в $t - \tau + 1$ -м году.

Используя ограничения, наложенные на изменение вектора конвертируемых мощностей $\bar{\mu}(t)$, построим для уравнения (5) прироста производственных мощностей в результате конверсии систему агрегирования

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}(t) &= \bar{C}\bar{\mu}(t), \quad \Delta\pi_k(t) = C\Delta\xi_k(t), \\ \Delta\pi_k(t) &= \sum_{\tau=1}^{\tau_k} \overline{\Delta\beta(\tau)\eta} \bar{\sigma}(t-\tau+1) - \bar{\gamma}\bar{\sigma}(t),\end{aligned}\quad (23)$$

совместную на подпространстве L_A , которое задается оператором Λ с матрицей (22). Легко видеть, что матрицы $\bar{\gamma}$ и $\overline{\Delta\beta(\tau)\eta}$, $\tau = 1, 2, \dots, \tau_k$, совместной на подпространстве L_A системы агрегирования (23) для исходного уравнения (5) задаются формулами $\bar{\gamma} = C\bar{e}_n(\bar{\gamma}^{-1}\bar{C}^0\bar{\mu})'$, $\overline{\Delta\beta(\tau)\eta} = C\Delta\alpha(\tau)\kappa(\bar{\gamma}^{-1}\bar{C}^0\bar{\mu})'$, $\tau = 1, 2, \dots, \tau_k$. Таким образом, для всех уравнений модели (6), не учитывающей влияние технического прогресса, построены агрегированные аналоги и найдены матрицы коэффициентов соответствующей агрегированной модели. Как следует из соотношений, задающих матрицы агрегированной модели, матрицы Q , $H(\tau)$ и $\Delta\beta(\tau)$ имеют размеры $m \times m$, а матрицы $\bar{H}(\tau)$, $\bar{\gamma}$ и $\overline{\Delta\beta(\tau)\eta}$ имеют размеры $m \times m^2$.

Объединяя уравнения агрегированной модели, получим динамическую модель, описывающую баланс, развитие и перестройку m технологических отраслей промышленности,

$$\begin{aligned}P(t) &= QP(t) + J(t) + R(t) + \Delta\Omega(t+1), \\ \Omega(t+1) &= \Omega(t) + \Delta\Omega(t+1), \\ J(t) &= \sum_{\tau=1}^{\tau_c} H(\tau)\rho(t-\tau+1) + \sum_{\tau=1}^{\tau_k} \bar{H}(\tau)\bar{\sigma}(t-\tau+1), \\ \Delta\pi(t) &= \sum_{\tau=\tau_H}^{\tau_P} \Delta\hat{\beta}(\tau)\rho(t-\tau+1) + \sum_{\tau=1}^{\tau_k} \overline{\Delta\beta(\tau)\eta} \bar{\sigma}(t-\tau+1) - \bar{\gamma}\bar{\sigma}(t), \\ \pi(t) &= \pi(t-1) + \Delta\pi(t), \\ P(t) &\leq \pi(t), \\ P(t) \geq 0, \quad \rho(t) \geq 0, \quad \bar{\sigma}(t) \geq 0, \quad \Omega(t) \geq 0, \\ t &= 1, 2, \dots\end{aligned}\quad (24)$$

Условия неотрицательности агрегированного полного выпуска $P(t)$, агрегированных задельных мощностей $\rho(t)$ и агрегированных конвертируемых мощностей $\bar{\sigma}(t)$ получаются из соответствующих условий, наложенных на переменные исходной модели (6), и неотрицательности матриц C и $\bar{C}$.

В заключение настоящего раздела приведем сводку формул, связывающих переменные и коэффициенты исходной и агрегированной моделей

$$\begin{aligned}P(t) &= CX(t), \quad \rho(t) = C\theta(t), \quad \pi(t) = C\xi(t), \\ J(t) &= DI(t), \quad R(t) = DY(t), \quad \Omega(t) = DZ(t), \\ \bar{\sigma}(t) &= \bar{C}\bar{\mu}(t), \quad D = T_2 W^* T_1 - T_2^*,\end{aligned}\quad (25)$$

* Формула вычисления матрицы D взята из [10], где описаны и процедуры вычисления матриц W^* , T_1 и T_2 .

$$\begin{aligned} E - Q &= D(E - A)C^+, \quad H(\tau) = DB(\tau)(\hat{\rho}^{-1}C^0\hat{\theta})', \\ \Delta\hat{\beta}(\tau) &= C\Delta\hat{\alpha}(\tau)(\hat{\rho}^{-1}C^0\hat{\theta})', \quad \bar{H}(\tau) = D\bar{B}(\tau)(\hat{v}^{-1}\bar{C}^0\hat{\mu})', \\ \overline{\Delta\beta(\tau)\eta} &= C\overline{\Delta\alpha(\tau)\kappa}(\hat{v}^{-1}\bar{C}^0\hat{\mu})', \quad \bar{\gamma} = C\bar{e}_n(\hat{v}^{-1}\bar{C}^0\hat{\mu})'. \end{aligned}$$

На рис. 3 показана связь между переменными исходной и агрегированной динамических моделей, учитывающих: переходящие из года в год запасы готовой продукции; многолетний период строительства новых мощностей; постепенное наращивание производственной мощности вводимых объектов; перестройки производства для выпуска другого вида продукции, которые продолжаются от одного до нескольких лет.

4. УЧЕТ ТЕХНИЧЕСКОГО ПРОГРЕССА И ПОСТРОЕНИЕ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

Изменение коэффициентов модели (24) вследствие технического прогресса учитывается в агрегированной модели так же, как это было сделано в исходной (7). Рассматривается то же число S организационно-технологических способов. Для каждого способа строится агрегированная модель вида (24), переменные и коэффициенты которой помечаются верхним индексом s , $s = 1, 2, \dots, S$. Сложность объединения этих моделей заключается в том, что матрицы D^s оказываются различными для разных организационно-технологических способов, поэтому единицы измерения агрегированного конечного продукта $J^s(t) + R^s(t) + \Delta\Omega^s(t)$ изменяются при переходе от одного способа к другому. Однако, учитывая конкретизацию матриц D^s , выполненную с целью введения в агрегированную модель условия неотрицательности агрегированных запасов, можно считать, что отдельные части агрегированного конечного продукта, выпускаемого во всей совокупности моделей, задаются соотношениями *

$$\begin{aligned} J(t) &= \sum_{s=1}^S J^s(t), \quad R(t) = \sum_{s=1}^S R^s(t), \\ \Delta\Omega(t) &= \sum_{s=1}^S \Delta\Omega^s(t). \end{aligned}$$

Итак, агрегированная динамическая модель, в которой учитывается влияние технического прогресса на коэффициенты, имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^S P^s(t) &= \sum_{s=1}^S Q^s P^s(t) + J(t) + R(t) + \Delta\Omega(t+1), \\ \Omega(t+1) &= \Omega(t) + \Delta\Omega(t+1), \\ J(t) &= \sum_{s=1}^S \left[\sum_{\tau=1}^{\tau_c^s} H^s(\tau) \rho^s(t-\tau+1) + \sum_{r=1}^S \sum_{\tau=1}^{\tau_r^{rs}} \bar{H}^{rs}(\tau) \bar{\sigma}^{rs}(t-\tau+1) \right], \\ \Delta\pi^s(t) &= \sum_{\tau=\tau_H^s}^{\tau_P^s} \Delta\hat{\beta}^s(\tau) \rho^s(t-\tau+1) + \end{aligned} \quad (26)$$

* При этом предполагается, что разбиение производственных мощностей по технологическим отраслям не зависит от номера организационно-технологического способа, т. е. $C^{0s} = C^{0r}$ для всех $r, s = 1, 2, \dots, S$.

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{r=1}^S \left[\sum_{\tau=1}^{\tau_K^{rs}} \Delta \beta^{rs}(\tau) \eta^{rs} \bar{\sigma}^{rs}(t-\tau+1) - \bar{\gamma}^{sr} \bar{\sigma}^{sr}(t) \right], \\
 & \pi^s(t) = \pi^s(t-1) + \Delta \pi^s(t), \\
 & P^s(t) \leq \pi^s(t), \\
 & P^s(t) \geq 0, \quad \rho^s(t) \geq 0, \quad \bar{\sigma}^{rs}(t) \geq 0, \quad \Omega(t) \geq 0, \\
 & r, s = 1, \dots, S, \quad t = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Все коэффициенты модели (26), за исключением матриц $\bar{\gamma}^{sr}$ и $\Delta \beta^{rs}(\tau) \eta^{rs}$, $\tau = 1, 2, \dots, \tau_K^{rs}$, $r, s = 1, 2, \dots, S$, могут быть найдены по (25). Матрицы $\bar{\gamma}^{sr}$ и $\Delta \beta^{rs}(\tau) \eta^{rs}$, описывающие конверсию не только между тех-

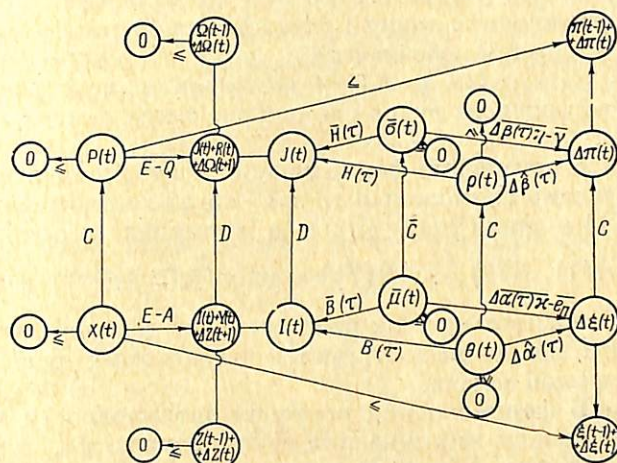


Рис. 3. Связь между переменными моделей (6) и (24) (агрегирование)

нологическими отраслями, но и между организационно-технологическими способами, вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
 \bar{\gamma}^{sr} &= C^r \bar{e}_n [(\hat{\gamma}^{sr})^{-1} \bar{C}^0 \hat{\mu}^{sr}]', \\
 \Delta \beta^{rs}(\tau) \eta^{rs} &= C^s \Delta \alpha^{rs}(\tau) \chi^{rs} [(\hat{\gamma}^{rs})^{-1} \bar{C}^0 \hat{\mu}^{rs}]', \\
 \tau &= 1, 2, \dots, \tau_K^{rs}, \quad r, s = 1, 2, \dots, S.
 \end{aligned}$$

В том случае, если агрегированная модель строится для решения задач оптимизации, возникает проблема построения функционала, выраженного в переменных агрегированной модели. Выделим три ситуации, в которых проблема построения агрегированного функционала решается по-разному.

А. Формализация критерия оптимальности в виде функционала выполнена как в терминах переменных исходной модели, так и в терминах переменных агрегированной модели. Оба функционала могут приводить к отличающимся оптимальным решениям, каждое из которых тем не менее приемлемо.

Б. Формализация критерия оптимальности выполнена с самого начала в некоторых агрегированных по отношению к переменным исходной модели показателях, или форма представления функционала в переменных исходной модели легко допускает замену исходных переменных агрегированными. Вся проблема заключается в том, чтобы построить агрегированную модель в тех же переменных, в которых выражен функционал.

В. Формализация критерия оптимальности в виде функционала выполнена только в переменных исходной многомерной модели. Если исключить ситуацию Б, когда замена исходных переменных агрегированными очевидна, здесь встают довольно сложные задачи выбора формы агрегированного функционала, исследования близости оптимальных решений, получаемых с использованием агрегированной модели, к оптимальным решениям, получаемым на исходной модели, и, наконец, задача оценки допустимости замены исходных оптимальных решений — решениями, получаемыми на агрегированной модели с использованием агрегированного функционала.

Рассмотрим более подробно ситуации А, Б и В на примере задачи нахождения такого плана, при котором часть $Y(\bar{t})$ конечного продукта, расходуемая на непроеизводственное потребление (на удовлетворение конечного спроса), оказывается в определенном смысле близкой к заданной потребности $\bar{Y}(t) \geq 0$, $t = 1, 2, \dots, T^*$. Для этого дополним соотношения исходной и агрегированной модели соответственно неравенствами $Y(t) \geq 0$ и $R(t) \geq 0$ и введем обозначения: $y_j(t)$ и $\tilde{y}_j(t)$ — компоненты векторов $Y(t)$ и $\tilde{Y}(t)$; $r_i(t)$ и $\tilde{r}_i(t)$ — компоненты векторов $R(t)$ и $\tilde{R}(t)$; m_i — множество индексов видов продукции, выпускаемых i -й технологической отраслью.

В ситуации А примерами формализации критерия оптимальности могли служить следующие функционалы для задач минимизации: $\Phi_1(Y(1), Y(2), \dots, Y(T)) = \max_{j,t} (\tilde{y}_j(t) / y_j(t))$ в терминах переменных исходной модели и $\Phi_2(R(1), \tilde{R}(2), \dots, R(T)) = \max_{i,t} (\tilde{r}_i(t) / r_i(t))$ в агрегированных переменных. Относительно этих функционалов должно быть известно, что их минимальные значения достигаются на искомым решениях первоначально поставленной задачи.

В ситуации Б формализация критерия оптимальности могла быть выполнена в виде задачи минимизации функционала Φ_2 , или функционал в переменных исходной модели имел вид: $\Phi_3(Y(1), Y(2), \dots, Y(t)) = \max_{i,t} \left(\sum_{h \in m_i} \tilde{y}_h(t) / \sum_{h \in m_i} y_h(t) \right)$, что соответствует учету лишь валовых

объемов конечного спроса по технологическим отраслям.

Функционал Φ_3 при выполнении замены переменных $R(t) = C^0 Y(t)$, $t = 1, 2, \dots, T$, легко преобразуется к виду Φ_2 , поэтому проблема сводится, например, к построению агрегированной модели вида (26) с матрицами D^s , $s = 1, 2, \dots, S$, максимально приближающимися к матрице C^0 .

Пусть в ситуации В формализация критерия оптимальности выполнена в виде задачи минимизации функционала Φ_1 , оптимальное решение которой отличается от решения, получающегося при использовании Φ_3 . В качестве агрегированного функционала здесь тем не менее можно выбрать Φ_2 , оценив предварительно ошибку в решении, получаемом при использовании агрегированного функционала и агрегированной модели. Эту ошибку можно оценить, проводя тестовые расчеты небольшой размерности одновременно на исходной и агрегированной моделях. Если тестовые расчеты не дают уверенности в приемлемости выбранного агрегированного функционала, необходимы изменение формы функционала или даже коррекция выбора переменных агрегированной модели.

* T — продолжительность планируемого промежутка времени.

5. ДЕЗАГРЕГИРОВАНИЕ

Переход от решения, полученного с использованием агрегированной модели, к решению в переменных исходной модели — дезагрегирование — выполняется в тех случаях, когда переменные дезагрегированного решения не имеют прямой связи с принятыми экономическими показателями, когда необходима дальнейшая детализация решений или возникает необходимость сопоставления результатов расчетов на агрегированной модели с результатами, получаемыми на исходной модели.

При построении агрегированной модели для простейшего варианта динамической модели межотраслевого баланса были выписаны формулы дезагрегирования. Формулы дезагрегирования решений, получаемых на более сложных агрегированных моделях (24) и (26), строятся на тех же принципах, которые были использованы в простейшей модели.

Для упрощения рассуждений рассмотрим дезагрегирование решений, получаемых на модели (24) *. Формулы дезагрегирования задельных и конвертируемых мощностей выписываются и доказываются аналогично формуле дезагрегирования приращения производственных мощностей (17)

$$\theta(t) = (\hat{\rho}^{-1} C^0 \hat{\theta})' \rho(t),$$

$$\bar{\mu}(t) = (\hat{v}^{-1} \bar{C}^0 \hat{\bar{\mu}})' \bar{\sigma}(t).$$

Дезагрегированные инвестиции и приращения производственных мощностей вычисляются из соотношений исходной модели (6)

$$I(t) = \sum_{\tau=1}^{\tau_c} B(\tau) \theta(t-\tau+1) + \sum_{\tau=1}^{\tau_k} \bar{B}(\tau) \bar{\mu}(t-\tau+1),$$

$$\Delta \xi(t) = \sum_{\tau=\tau_n}^{\tau_p} \Delta \hat{\alpha}(\tau) \theta(t-\tau+1) + \sum_{\tau=1}^{\tau_k} \overline{\Delta \alpha(\tau)} \bar{\mu}(t-\tau+1) - \bar{e}_n \bar{\mu}(t).$$

Для дезагрегирования полного выпуска можно воспользоваться формулой (13)

$$X(t) = [E - wW^0(E - A)] C^+ P(t) + wW^0[I(t) + Y(t) + \Delta Z(t+1)].$$

Однако здесь остаются неизвестными дезагрегированные векторы конечного спроса $Y(t)$ и приращения запасов $\Delta Z(t+1)$.

При некоторых вариантах использования динамических моделей вектор конечного спроса $Y(t)$ может быть известен заранее (например, в имитационных моделях $Y(t) = \tilde{Y}(t)$). В случае оптимизационной постановки задачи дезагрегирование конечного спроса осуществляется отдельно. Формулы дезагрегирования конечного спроса зависят от использованного в задаче функционала. Если при построении агрегированной модели (24) удалось достаточно точно выполнить условие $D = C^0$, то для функционалов Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 формулы дезагрегирования конечного спроса имеют вид

$$Y(t) = [(\hat{R}(t))^{-1} C^0 \hat{Y}(t)]' R(t), \quad t = 1, 2, \dots, T.$$

Предполагается, что при решении задачи оптимизации удалось получить неотрицательное значение функционала, т. е. дезагрегированный вектор $Y(t)$ неотрицателен.

* Формулы дезагрегирования для модели (26), как и формулы вычисления коэффициентов этой модели, получаются в результате соответствующей расстановки индексов организационно-технологических способов.

Дезагрегированные приращения запасов $\Delta Z(t+1)$, поскольку их структура не задана, будем вычислять по формулам, в которых структура задается векторами конечной продукции

$$I(t) + Y(t)^*,$$

$$\Delta Z(t+1) = [(\hat{G}(t))^{-1}C^0\hat{\xi}(t)]'\Delta\Omega(t+1), \quad t = 1, 2, \dots, T,$$

где $G(t) = J(t) + R(t)$, $\hat{\xi}(t) = I(t) + Y(t)$.

Схема вычисления дезагрегированных переменных показана на рис. 4.

Для дезагрегированных переменных выполнено неравенство модели производственных возможностей (8), которое по предположению эквивалентно неравенству $X(t) \leq \xi(t)$, задающему производственные возможности в исходной динамической модели (6).

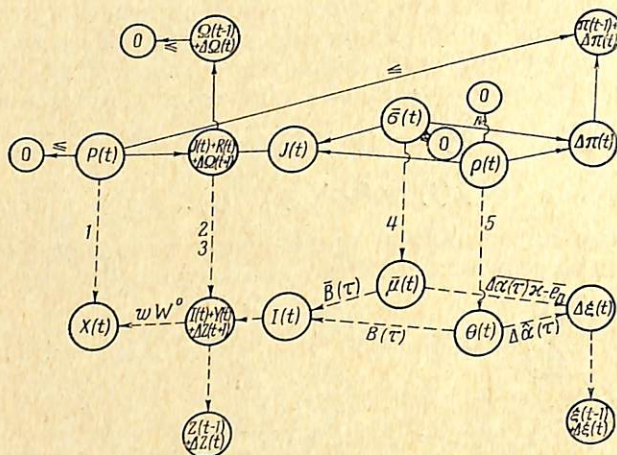


Рис. 4. Связь между переменными моделей (6) и (24) (дезагрегирование). Цифры на пунктирных стрелках означают применение следующих дезагрегирующих операторов: 1 — $[E - wW^0(E - A)]C^+$; 2 — $[(\hat{R}(t))^{-1}C^0\hat{Y}(t)]'$; 3 — $[(\hat{G}(t))^{-1}C^0\hat{\xi}(t)]'$; 4 — $(\hat{v}^{-1}C^0\hat{\mu})'$; 5 — $(\hat{\rho}^{-1}C^0\hat{\theta})'$.

Условия неотрицательности дезагрегированных переменных $\theta(t)$ и $\bar{\mu}(t)$ выполняются в силу неотрицательности дезагрегирующих матриц $(\hat{\rho}^{-1}C^0\hat{\theta})'$, $(\hat{v}^{-1}C^0\hat{\mu})'$ и соответствующих условий на агрегированные векторы $\rho(t)$ и $\bar{\sigma}(t)$. Условия неотрицательности дезагрегированных запасов, как было отмечено выше, выполняются в пределах точности, обеспечиваемой расчетами на агрегированной модели. Результат применения формулы дезагрегирования для $X(t)$, давая точное решение задачи статического межотраслевого баланса, эквивалентен умножению вектора конечного выпуска $I(t) + Y(t) + \Delta Z(t+1)$ на неотрицательную матрицу полных затрат $(E - A)^{-1}$.

Покажем, что дезагрегированный вектор конечного выпуска $I(t) + Y(t) + \Delta Z(t+1)$ неотрицателен, если знаки компонент вектора агрегированного конечного выпуска $J(t) + R(t) + \Delta\Omega(t+1)$ совпадают со знаками вектора $G(t) = J(t) + R(t)$. Действительно, $I(t) + Y(t) \equiv [(\hat{G}(t))^{-1}C^0\hat{\xi}(t)]'(J(t) + R(t))$, поэтому дезагрегированный вектор ко-

* Такое задание дезагрегированных приращений запасов имеет смысл лишь при не очень сильных изменениях вектора $I(t) + Y(t)$ от года к году.

нечного выпуска

$$I(t) + Y(t) + \Delta Z(t+1) = [(\hat{G}(t))^{-1} C^0 \hat{\xi}(t)]' (J(t) + R(t) + \Delta \Omega(t+1)).$$

Осталось показать, что $\xi(t) = I(t) + Y(t)$ — неотрицательный вектор. Дезагрегированные инвестиции $I(t) \geq 0$, так как $B(\tau) \geq 0$, $\bar{B}(\tau) \geq 0$, $\theta(t) \geq 0$, $\bar{\mu}(t) \geq 0$, а $Y(t) = \bar{Y}(t) \geq 0$ в имитационных моделях и $Y(t) \geq 0$, если $\Phi \geq 0$, в случае оптимизационной постановки задачи.

Случай, когда какая-либо из компонент вектора $J(t) + R(t) + \Delta \Omega(t+1)$ имеет знак, отличный от знака соответствующей компоненты вектора $J(t) + R(t)$, соответствует тому, что агрегированные инвестиционные потребности и конечный спрос по какой-либо технологической отрасли целиком удовлетворяются за счет имеющихся запасов готовой продукции, а все наличные мощности данной технологической отрасли либо простаивают, либо обеспечивают только текущие межотраслевые поставки. Таким образом, дезагрегированный вектор полного выпуска $X(t)$ неотрицателен, за исключением случаев выделения технологических отраслей, почти полностью работающих на удовлетворение текущих межотраслевых поставок.

В заключение рассмотрим вопрос о точности, обеспечиваемой расчетами на агрегированных моделях (11), (24) и (26). Здесь нельзя указать точные оценки ошибок, так как замена (1), (6) и (7) агрегированными моделями эквивалентна наложению определенных условий и ограничений на области изменения переменных исходных моделей*. Так, например, для (24) дезагрегированные переменные $\theta(t)$ и $\bar{\mu}(t)$ принадлежат соответствующим подпространствам L_Δ , структура векторов дезагрегированного конечного спроса $\bar{Y}(t)$, $t = 1, 2, \dots, T$, совпадает внутри технологических отраслей со структурой векторов заданного конечного спроса $\bar{Y}(t)$, $t = 1, 2, \dots, T$, а структура векторов дезагрегированных приращений запасов $\Delta Z(t+1)$, $t = 1, 2, \dots, T$, определяется вектором $I(t) + Y(t)$, $t = 1, 2, \dots, T$.

Ошибка в дезагрегированном решении зависит от расстояния между точным решением, получаемым на исходной модели, и более узкой областью дезагрегированных решений. Наибольшая точность расчетов на агрегированных моделях (11), (24) и (26) достигается тогда, когда решения, получаемые на исходных моделях (1), (6) и (7), принадлежат области дезагрегированных решений. Поэтому для повышения точности, обеспечиваемой расчетами на агрегированных моделях, при их построении необходимо стремиться либо к расширению области дезагрегированных решений, либо, если имеется априорная информация, суживающая область точных решений, к возможно более полному совпадению области дезагрегированных решений и суженной области точных решений.

Расширение области дезагрегированных решений может быть достигнуто в свою очередь либо увеличением размерности агрегированной модели, либо разработкой более сложного аппарата для вычисления коэффициентов агрегированной модели. Примером расширения области дезагрегированных решений за счет усложнения процедур вычисления матриц агрегированной модели может служить биматричное агрегирование [10], где область дезагрегированных решений совпадает с областью решений, получаемых на исходной модели. Однако число арифметических операций, необходимых для вычисления агрегированной матрицы коэффициентов прямых материальных затрат, приближается при биматричном агрегировании к числу операций обращения матрицы коэффициентов затрат-выпуска.

* Это свойство присуще и другим агрегированным моделям (см., например, [11]).

Итак, рассмотрен математический аппарат построения агрегированных динамических моделей межотраслевого баланса. Использование таких моделей вносит некоторую ошибку в решение, но этот недостаток окупается, во-первых, большей наглядностью агрегированных моделей и агрегированных решений, потому что по многомерным моделям, содержащим слишком детализированную информацию, гораздо труднее принимать обоснованные решения. Во-вторых, агрегированные модели могут служить инструментом для приближенных численных расчетов, когда за короткое время необходимо рассчитать несколько различных вариантов развития экономической системы и лишь после получения приемлемого производственного уточнения на детализированной модели. В-третьих, агрегированные модели позволяют уточнить структуру уже построенных макромоделей и установить их связь с более подробными моделями (микромоделями) той же самой экономической системы.

Разработанный математический аппарат может быть использован при построении агрегированных аналогов и для других линейных динамических моделей, описывающих развитие и перестройку промышленности. Необходимым условием для этого является наличие линейной модели меньшей размерности, эквивалентной соотношениям, задающим производственные возможности в исходной модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Hatanaka. Note on Consolidation Within a Leontief System. *Econometrica*, 1952, v. 20, N 2.
2. E. Malinvaud. Aggregation Problems in Input-Output Models. В сб. *The Structural Interdependence of the Economy*. N. Y. Wiley, 1954.
3. J. B. Balderston, T. M. Whitin. Aggregation in the Input-Output Model. В сб. *Economic Activity Analysis*. N. Y. Wiley, 1954.
4. J. C. H. Fei. A Fundamental Theorem for the Aggregation Problem of Input-Output Analysis. *Econometrica*, 1956, v. 24, N 4.
5. H. Theil. Linear Aggregation in Input-Output Analysis. *Econometrica*, 1957, v. 25, N 1.
6. A. Ghosh. Input-Output Analysis with Substantially Independent Groups of Industries. *Econometrica*, 1960, v. 28, N 1.
7. M. Morishima, F. Seton. Aggregation in Leontief Matrices and the Labor Theory of Value. *Econometrica*, 1961, v. 29, N 2.
8. Ю. С. Архангельский. Определение ошибки агрегирования в межотраслевом балансе. *Экономика Сов. Украины*, 1966, № 7.
9. В. В. Россов. Теория агрегирования и выбор номенклатуры межотраслевого баланса. В сб. *Оптимальное планирование и совершенствование управления народным хозяйством*. М., «Наука», 1969.
10. В. Л. Вен, А. И. Эрлих. Некоторые вопросы агрегирования линейных моделей. *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика*, 1970, № 5.
11. W. D. Fisher. Clustering and Aggregation in Economics. Baltimore. The Johns Hopkins Press, 1969.
12. В. Л. Вен. Агрегирование динамической модели межотраслевого баланса. *Ж. вычислит. матем. и матем. физики*, 1971, т. 11, № 6.
13. Р. Стоун. Метод затраты — выпуск и национальные счета. М., «Статистика», 1966.
14. Ю. П. Иванов, А. А. Петров. Динамическая модель расширения и перестройки производства (л-модель). В сб. *Кибернетику на службу коммунизму*. Т. 6. М., «Энергия», 1971.
15. В. Л. Вен, А. И. Эрлих. Линейная модель производственных возможностей промышленности. В сб. *Программный метод управления*. Вып. 1. М., 1971 (ВЦ АН СССР).
16. R. Penrose. A Generalized Inverse for Matrices. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1955, v. 51, N 3.
17. Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. М., «Наука», 1967.

Поступила в редакцию
10 XI 1971