
**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ**

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПОРТФЕЛЕМ ЦЕННЫХ БУМАГ

© 2015 г. Е.В. Коваленко

(Москва)

В статье построены аналитические решения и предложены численные методы решения задачи Коши для параболического уравнения с полиномиальной зависимостью коэффициентов от пространственных переменных и произвольной зависимостью от временной переменной. На основе предложенных аналитических решений и численных алгоритмов созданы методы построения распределений различных вероятностных параметров управляемого портфеля, где активы моделируются системой стохастических дифференциальных уравнений, тренды в которой зависят от ряда макроэкономических параметров.

Ключевые слова: задача Коши, стохастическое дифференциальное уравнение, функционал доходности, оптимальное управление, управляемый портфель.

Классификация JEL: C02, G11.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе предлагается эффективный метод решения задачи Коши для параболического уравнения с линейно-квадратичной зависимостью коэффициентов от пространственных переменных и произвольной зависимостью от времени. Параболические уравнения с такого рода зависимостью часто встречаются в прикладных задачах механики, физики, финансовой математики (Камбарбаева, 2011; Beletzki, Pliska, 1999; Cordero-Soto et al., 2008). В случае, когда коэффициенты не зависят от пространственных переменных, можно построить явные аналитические решения, ряд которых приведен в справочнике (Полянин, 2001).

В качестве приложения предлагаемого в настоящей работе метода рассматривается задача управления инвестиционным портфелем, активы которого моделируются при помощи системы стохастических дифференциальных уравнений с учетом воздействия на тренды активов ряда макроэкономических факторов. Такие модели исследовались в работе (Beletzki, Pliska, 1999), авторы построили оптимальное так называемое рискочувствительное управление. Такое управление максимизирует функционал доходности на большом временном интервале при наличии в функционале штрафного слагаемого (причем штраф налагается за большие значения дисперсии доходности на больших временах). Рискочувствительность функционала состоит в наличии в функционале параметра, величина которого регулирует величину штрафа за большое значение дисперсии доходности мгновенной процентной ставки портфеля.

Указанная работа явилась результатом больших предыдущих усилий различных авторов в области так называемого эргодического управления. Задачи эргодического управления изучаются на бесконечном интервале времени, функционал, подлежащий оптимизации, задается как предел на бесконечности некоего выражения от траекторий управляемой системы. В основе исследований лежат эргодические свойства такой системы, т.е. возможность выразить средние по траекториям через пространственные средние по некоторой специальной мере¹.

Авторы статьи (Belecki, Pliska, 1999), несомненно, отдавали себе отчет в том, что управление на бесконечном интервале времени – математическая абстракция и практическое применение

¹ Работа (Belecki, Pliska, 1999) опирается на довольно сложную математическую работу (Nagai, 1996). По этой работе читатель может составить представление о математических методах, используемых в данной области, изучить доказательства.

законов управления портфелем, рассчитанных на бесконечно далекое будущее, будет вызывать серьезные вопросы. Однако оптимальное управление, вычисленное на далекое будущее, неплохо зарекомендовало себя для конкретных задач на интервалах времени не малых, но и не слишком больших (порядка года). Диссертация Г.С. Комбарбаевой была предметом исследования на тему, как можно изменить функционал в задаче управления, чтобы полученный закон управления более эффективно обслуживал короткие интервалы времени. В работе (Комбарбаева, 2011) сохранена базовая модель активов, и она полностью совпадает с моделью, используемой в (Belecki, Pliska, 1999). Однако функционал, подлежащий оптимизации, совершенно другой – это условное значение мгновенной доходности портфеля при фиксированном значении вектора макрофакторов модели со штрафным членом за большое значение дисперсии доходности. Было выявлено, что для такого функционала оптимальное управление может быть построено в аналитической форме. Анализ на ряде реальных данных показал, что на сравнительно коротких временах (недели) подход Г.С. Комбарбаевой дает лучшие, чем в работе (Belecki, Pliska, 1999), результаты, однако с увеличением интервала времени последний метод начинает выигрывать, хотя математически он рассчитан на бесконечный, а не на конечный интервал времени.

Следует также сделать некоторые замечания относительно функционала доходности, который используется в работе (Belecki, Pliska, 1999) и приводится в настоящей работе. Рассматривая довольно сложное выражение, являющееся нижним пределом на бесконечности по времени некоторого выражения от траекторий управляемой системы, непросто понять, почему в качестве функционала для оптимизации выбран именно этот функционал. Выбор был обусловлен всей предысторией развития данного направления исследований. Во-первых, при малом значении рискочувствительного параметра главный член асимптотики по этому малому параметру представляет математическое ожидание мгновенной доходности за вычетом дисперсии мгновенной доходности с положительным коэффициентом, т.е. это естественным образом определенный штрафной функционал со штрафом за большое значение дисперсии мгновенной процентной ставки. Во-вторых, задача Беллмана с терминальным условием для такого функционала допускает в ряде случаев построение оптимального управления в явной аналитической форме, что очень важно для практического использования метода. В-третьих, применение такого управления в реальных задачах даже на конечном интервале времени дает неплохие результаты.

Приведем определение мгновенной процентной ставки. Пусть $V(t)$ – меняющийся во времени капитал портфеля. Представим его в виде произведения начального значения капитала $V(0)$ и экспоненты от произведения величины мгновенной процентной ставки (которую мы хотим определить) на длину интервала времени t . Если бы процентная ставка была постоянной, ее можно было бы трактовать как постоянный банковский процент, а капитал выражался бы простейшей формулой для сложного процента. Ясно, что мгновенная процентная ставка представима через капитал с помощью логарифмирования и деления на t .

Авторами работ (Комбарбаева, 2011; Belecki, Pliska, 1999) были получены явные выражения для закона оптимального управления, однако весьма желательным было бы рассчитать текущее распределение доходности капитала портфеля. Предлагаемый в данной работе метод позволяет это сделать в обоих случаях. В разд. 1–2 излагается метод расчета решения задачи Коши для параболического уравнения, коэффициенты которого – полиномы не выше второй степени. В разд. 3 рассматриваются приложения метода к задаче расчета эволюции функций распределения некоторых характеристик управляемого портфеля.

1. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ГАУССОВСКОГО НАЧАЛЬНОГО УСЛОВИЯ

Рассмотрим параболическое уравнение

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + (bx + c) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} + (dx^2 + ex + f) \quad (1)$$

с начальным условием гауссовского типа

$$u(0, x) = \varphi(x) = \alpha_0 e^{-0,5\beta_0 x^2 + \gamma_0 x}. \quad (2)$$

Об уравнении известно (Cordero-Soto et al., 2008), что оно сохраняет гауссовость начального условия. Подстановка в (1) функции $u(t, x) = \alpha(t)e^{-0,5\beta x^2 + \gamma(t)x}$ приводит к системе трех уравнений относительно $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\gamma(t)$:

$$\begin{cases} \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} = a\gamma^2(t) - a\beta(t) + c\gamma(t) + f, \\ -\frac{\beta'(t)}{2} = a\beta^2(t) - b\beta(t) + d, \\ \gamma'(t) = (-2a\beta(t) + b)\gamma(t) + e - c\beta(t) \end{cases} \quad (3)$$

с начальными условиями

$$\alpha(0) = \alpha_0, \quad \beta(0) = \beta_0, \quad \gamma(0) = \gamma_0. \quad (4)$$

Во втором уравнении этой системы переменные разделяются и решением является

$$\beta(t) = \frac{b + \sqrt{D} \tanh(\sqrt{D}t - g)}{2a}, \quad (5)$$

$$D = b^2 - 4ad, \quad g = \operatorname{arc} \tanh\left(\frac{2a\beta_0 - b}{\sqrt{D}}\right).$$

Уравнение (3)–(4) на $\gamma(t)$ линейно, его решение выражается при помощи формулы

$$\gamma(t) = \exp\left\{\int_0^t (-2a\beta(\tau) + b) d\tau\right\} \left\{\int_0^t (e - c\beta(\tau)) \exp\left\{\int_0^\tau (2a\beta(s) - b) ds\right\} d\tau + \gamma_0\right\}. \quad (6)$$

Подставив (5) в (6) и проинтегрировав полученный результат, найдем

$$\gamma(t) = \frac{2ae - bc}{2a\sqrt{D}} \tanh(\sqrt{D}t - g) - \frac{c}{2a} + \left(\frac{2ae - bc}{2a\sqrt{D}} \sinh g + \frac{c \cosh g}{2a} + \gamma_0 \cosh g\right) \frac{1}{\cosh(\sqrt{D}t - g)}.$$

Обозначая

$$c_1 = \frac{2ae - bc}{2a\sqrt{D}}, \quad c_2 = \frac{2ae - bc}{2a\sqrt{D}} \sinh g + \frac{c \cosh g}{2a} + \gamma_0 \cosh g$$

и интегрируя первое уравнение (3) с учетом (4), имеем

$$\begin{aligned} \alpha(t) = \alpha_0 & \left\{ \left(ac_1^2 - \frac{c^2}{2a} - \frac{b}{2} + f \right) t + \frac{a(-c_1^2 + c_2^2)}{\sqrt{D}} [\tanh(\sqrt{D}t - g) + \tanh g] + \right. \\ & \left. + \frac{2c_1c_2a}{\sqrt{D}} (\operatorname{sech}(\sqrt{D}t - g) - \operatorname{sech} g) \sqrt{\cosh(\sqrt{D}t - g)/\cosh g} \right\}. \end{aligned}$$

Допустим теперь, что коэффициенты a, b, c, d, e, f кусочно-постоянны по переменной t . Пусть $\{t_i\}$, $i = 1, \dots, n$ – совокупность точек разрыва функций $a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t)$. Тогда в качестве первого шага, решая задачу Коши на отрезке $[0, t_1]$ с начальным условием исходной задачи (4), получим в момент t_1 некую гауссовскую функцию $u_1(t_1, x)$. Далее на шаге i решаем задачу Коши на отрезке $[t_{i-1}, t_i]$ с начальным условием $u_{i-1}(t_{i-1}, x)$ и получаем функцию $u_i(t_i, x)$. На последнем шаге этого процесса построим решение исходной задачи. Этот итерационный процесс сводится к подстановкам одних явных аналитических выражений в другие. Следовательно, можно решить задачу (1)–(2) в случае кусочно-непрерывной зависимости коэффициентов от времени.

2. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ НАЧАЛЬНОМ УСЛОВИИ

Теперь допустим, что начальное условие в (2) заменено на $u(0, x) = \psi(x)$, коэффициенты уравнения являются кусочно-постоянными функциями по переменной t , $\psi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Хорошо известно, что имеет место формула

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} E(x, y, t) \psi(y) dy, \quad (7)$$

где $E(x, y, t)$ – фундаментальное решение, являющееся решением задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + (bx + c) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} + (dx^2 + ex + f)u(t, x), \\ u(0, x) = \delta(x - y). \end{cases} \quad (8)$$

Приближим решение задачи (8) при $y = 0$ решением задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + (bx + c) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} + (dx^2 + ex + f)u(t, x), \\ u(0, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \exp\{-0,5Ny^2\} \exp\{-0,5Nx^2 + Nux\}, \end{cases} \quad (9)$$

где параметр $N > 0$.

Заметим, что начальное условие в задаче (9) – гауссовское, поэтому задача может быть решена описанным выше методом. Далее необходимо задать сетку по оси Ox и численно вычислить интеграл в (7), заменяя в нем $E(x, y, t)$ на решение задачи (9), которое задается явно. Для достижения необходимой точности следует взять параметр $N > 0$ достаточно большим.

3. ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ПОРТФЕЛЕМ ЦЕННЫХ БУМАГ

Вначале сформулируем известную теорему о характеристических функциях интегральных функционалов от диффузионных процессов. Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений и интегральный функционал от ее решения:

$$dX(t) = F(t, X(t))dt + \Lambda dW, \quad X(0) = x,$$

$$\eta_t = \int_0^t g(t, X(\tau))d\tau + \int_0^t h(t, X(\tau))dW.$$

Здесь $X(t)$ – диффузионный процесс размерности n ; $F(X)$ – вектор-функция размерности n ; Λ – матрица размерности $n \times N$; W – винеровский процесс размерности N ; g – вектор-функция размерности k ; h – матрица функций размерности $k \times N$.

Обозначим через $\mathcal{L}_x$ оператор Колмогорова стохастического дифференциального уравнения для процесса $X(t)$:

$$\mathcal{L}_x = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (\Lambda \Lambda^T)_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n F_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Элементы вектор-функций и матриц F , g , h будем считать гладкими функциями; здесь и далее знак “Т” в верхнем индексе обозначает транспонирование. Далее нам потребуется теорема о поведении характеристической функции распределения случайной величины η_t .

Теорема (Королук, Портенко, Скороход, 1978). Пусть $u(t, x, \xi)$ – характеристическая функция случайной величины η_t . Тогда она удовлетворяет уравнению и терминальному условию

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}_x u + (i\Lambda h^T \xi, \nabla_x u) + (i\langle g, \xi \rangle - 0,5 |h^T \xi|^2) u = 0, \\ u(T_{fin}, x, \xi) = 1, \end{cases} \quad (10)$$

где T_{fin} – конечное значение времени.

Перейдем к непосредственному описанию модели инвестиционного портфеля Белецки–Плиски (Beletzki, Pliska, 1999). В отличие от широко известной работы (Markowitz, 1952), где цены на активы моделируются не зависящими от времени случайными величинами, здесь цены на активы являются решениями стохастических дифференциальных уравнений.

Пусть на рынке имеется $m \geq 2$ ценных бумаг и поведение цен на эти бумаги зависит от $n \geq 1$ экономических макрофакторов. Цена акции i задается дифференциальным уравнением

$$\begin{cases} \frac{dS_i}{S_i} = (\alpha + AX(t))_i dt + \sum_{k=1}^{m+n} \sigma_{ik} dW_k(t), \\ S_i(0) = s_i, \quad i = 1, \dots, m, \end{cases}$$

где $X(t)$ – n -мерный фактор-процесс, удовлетворяющий уравнению

$$\begin{cases} dX_i(t) = (\beta + BX(t))_i dt + \sum_{k=1}^{m+n} \lambda_{ik} dW_k(t), \\ X_i(0) = x_i, \quad i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

В данных уравнениях используются следующие параметры, поддающиеся оценке: A – матрица размерности $m \times n$; B – матрица размерности $n \times n$; $\Sigma = (\sigma_{ij})$ – матрица размерности $m \times (m+n)$; $\Lambda = (\lambda_{ij})$ – матрица размерности $n \times (m+n)$; α – вектор длины m ; β – вектор длины n .

При помощи вектора $X = (X_1, \dots, X_n)$ – моделируется воздействие внешних экономических факторов X на цены акций S_i , что выражается в зависимости тренда в уравнениях для цен S_i от текущего значения макрофактора X .

Обозначим через $\bar{h}(t)$ – инвестиционный процесс, где $\sum_{i=1}^m h_i(t) = 1$, $h_i(t)$ – доля капитала портфеля, вложенного в актив i ; $W(t) = (W_1(t), \dots, W_{m+n}(t))$ – винеровский процесс размерности $m+n$ с независимыми компонентами $W_k(t)$.

Если значения долей каких-либо активов отрицательны, можно считать, что они взяты в долг у какого-либо финансового субъекта так же, как деньги могут быть взяты в кредит в банке.

Уравнение, описывающее изменение капитала портфеля:

$$dV = V(t) \sum_{i=1}^m h_i(t) \left((\alpha + AX(t))_i dt + \sum_{k=1}^{m+n} \sigma_{ik} dW_k(t) \right).$$

По результатам статьи (Beletzki, Pliska, 1999) оптимальное управление с портфелем $\bar{h}(t)$ должно максимизировать функционал

$$I_\theta(v, x, h(\bullet)) := \liminf_{t \rightarrow \infty} (-2/\theta) t^{-1} \ln \text{Mexp} \{ -(2/\theta) \ln V(t) \}$$

при условиях $V(0) = v$, $X(0) = x$ (функционал представляет мгновенную доходность при больших значениях времени с учетом штрафа за высокий риск); M – знак математического ожидания.

Функционал $I_\theta(v, x, h(\bullet))$ принято называть рискочувствительным. Отличительной особенностью данной модели является то, что в этом функционале участвует параметр θ , характеризующий отношение инвестора к риску: положительные значения соответствуют осторожному, а

значения $\theta \rightarrow 0$ – безразличному к риску игроку. Такая роль рискочувствительного параметра связана с тем обстоятельством, что разложение в ряд Тейлора по этому параметру содержит дисперсию мгновенной процентной ставки с коэффициентом θ со знаком “минус” в качестве штрафного слагаемого за большие значения дисперсии как меры рискованности.

В статье (Камбарбаева, 2011) доказывается, что оптимальное управление $\bar{h}(t)$ можно найти как минимум линейно-квадратичной формы

$$0,5(0,5\theta + 1) \langle h^T \Sigma, \Sigma^T h \rangle - \langle h^T, (\alpha + AX) \rangle \quad (11)$$

при наличии ограничений $\sum_{k=1}^m h_k = 1$.

Обозначим значение минимума как $K_\theta(X)$. Если X – единственный макрофактор, то

$$\Lambda = \left(\overbrace{0, \dots, 0}^m, \lambda \right),$$

$W(t) = (W_1(t), \dots, W_{m+1}(t))$ – попарно независимые винеровские процессы,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1m} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{m1} & \dots & \sigma_{mm} & 0 \end{pmatrix}.$$

Система уравнений для цен на активы, макрофактора и капитала портфеля в этом случае принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{dS_i(t)}{S_i(t)} = (\alpha + AX(t))_i dt + \sum_{k=1}^m (\sigma_{ik} dW_k), \\ dX(t) = (\beta + BX(t)) dt + \lambda dW_{m+1}, \\ dV(t) = V(t) \sum_{i=1}^m h_i(t) \left(((\alpha + AX)_i) dt + \sum_{k=1}^{m+1} \sigma_{ik} dW_k \right). \end{cases} \quad (12)$$

В результате минимизации линейно-квадратичной формы (11) найдем, что

$$h_j^\theta = \frac{1}{2q} \sum_{i=1}^m \tilde{\sigma}_{ij} (\alpha_i + A_i X - X), \quad q = 0,5(\theta/2 + 1).$$

Здесь $(\tilde{\sigma}_{ij})$ – матрица, обратная к матрице-произведению $\Sigma \Sigma^T$ (с выброшенным в Σ нулевым столбцом). Таким образом, управление является линейной функцией от макроэкономического фактора $h^\theta(t, X) = M^\theta X + m^\theta$.

В работе (Камбарбаева, 2011) в рамках описанной выше модели формулируется другая задача оптимального управления, а именно максимизируется текущее условное математическое ожидание доходности портфеля (при заданном значении макрофактора $X(t)$) и при наличии штрафного члена с условной дисперсией текущей доходности. Такое управление также линейно зависит от наблюдаемого макрофактора X , только коэффициенты линейной формы в данном случае зависят от времени: $h_1^\theta(t, X) = M^\theta(t)X + m^\theta(t)$. Для функций $M^\theta(t)$ и $m^\theta(t)$ в статье (Камбарбаева, 2011) приведены явные выражения. Оптимальные управления $h^\theta(t, X)$ и $h_1^\theta(t, X)$ нацелены на достижение максимальной доходности при больших значениях времени и для текущих значений времени соответственно. И в том, и в другом случаях максимизируемые функционалы содержат “плату” за большие значения дисперсии доходности. Поэтому для анализа возможности применения оптимального управления $h^\theta(t, X)$ и $h_1^\theta(t, X)$ при управлении инвестиционным портфелем важно создать эффективный алгоритм вычисления функции распределения текущей доходности.

В обоих случаях мгновенная процентная ставка портфеля выражается как интегральный функционал от диффузионного процесса, описывающего поведение макрофактора X :

$$\rho(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \left(\sum_{i=1}^m h_i(t, X) (\alpha + AX(t))_i - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m (H_k(X))^2 \right) d\tau + \frac{1}{t} \int_0^t \sum_{k=1}^m (H_k(X)) dW_k,$$

где $H_k = \sum_{i=1}^m h_i(X(t)) \sigma_{ik}$.

Поскольку зависимость $\bar{h}_i(t, X)$ от X линейная, то уравнение для характеристической функции случайной величины $\rho(t)$, приведенное в разд. 3, принимает вид (1) с коэффициентами a, b, c, d, e, f , зависящими от времени. Приближая эти функции кусочно-постоянными функциями от переменной t и применяя описанный выше итерационный метод решения уравнения (10) с постоянным начальным условием, получим характеристическую функцию случайной величины $\rho(t)$.

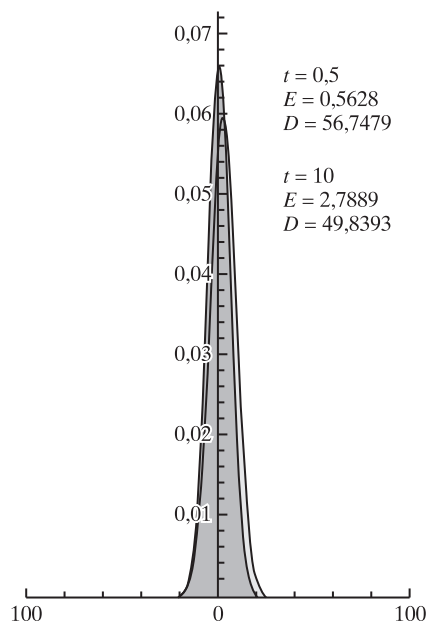
Далее, для расчета плотности распределения $\rho(t)$ следует применить обратное преобразование Фурье (например, для численных расчетов – алгоритм быстрого преобразования Фурье). Описанный метод обладает большей точностью и меньшей трудоемкостью по сравнению с прямыми методами решения задачи Коши для уравнения Колмогорова, соответствующего системе (12).

В заключение приведем результаты численных расчетов эволюции мгновенной процентной ставки описанным выше методом. Расчеты проводились для системы из двух активов, тренды которых зависят от одного макроэкономического фактора. На рисунке приведены графики плотности распределения мгновенной процентной ставки для двух различных моментов времени. Система уравнений для активов имеет вид:

$$\frac{dS_1}{S_1} = (0,15 - X(t))dt + 0,2dW_1(t), \quad S_1(0) = s_1 > 0;$$

$$\frac{dS_2}{S_2} = X(t)dt + dW_2(t), \quad S_2(0) = s_2,$$

где $W_1(t), W_2(t), W_3(t)$ – независимые винеровские процессы, а уравнение для единственного макрофактора модели представимо в виде $dX(t) = (0,05 - X(t))dt + 0,02dW_3(t)$, $X(0) = 1$. На рисунке хорошо видно, что с увеличением времени растет математическое ожидание мгновенной процентной ставки².



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Камбарбаева Г.С.** (2011). Задача составления эффективного портфеля в модели рынка согласно Белецкому и Плиске // *Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика*. № 5. С. 14–20.
- Полянин А.Д.** (2001). Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит.
- Корольук В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В.** (1978). Справочник по теории вероятностей и математической статистике. Киев: Наукова думка.

² Написал программу и осуществил расчеты для данного случая аспирант механико-математического факультета МГУ А.З. Асеков, которому автор выражает благодарность за проделанную работу.

- Beletski T.R., Pliska S.R.** (1999). Risk Sensitive Dynamic Asset Management // *Appl. Math. Optimization*. Vol. 39. No. 3. P. 337–360.
- Cordero-Soto R., Lopez R.M., Suazo E., Suslov S.K.** (2008). Propagator of a Charged Particle with a Spin in Uniform Magnetic and Perpendicular Electric Fields // *Lett. Math. Phys.* Vol. 84. No. 2–3. P. 159–178.
- Markowitz H.M.** (1952). Portfolio selection // *J. of Finance*. Vol. 7. No. 1. P. 77–91.
- Nagai H.** (1996). Bellman Equations of Risk-Sensitive Control // *SIAM J. Control and Optimization*. Vol. 34. P. 74–101.

Поступила в редакцию
24.04.2014 г.

On One Method of Solving the Problem of Optimal Securities Portfolio Management

E.V. Kovalenko

Analytical solutions for the Cauchy problem were constructed and numerical methods were proposed in the article. The results apply to the Cauchy problem for a parabolic equation with polynomial dependence on spatial variables and with arbitrary dependence on time variable.

On the basis of the proposed analytical solutions and numerical algorithms, methods of construction of various probabilistic parameters were created for the controlled portfolio, which has assets modeled by a system of stochastic differential equations with trends depending on a number of macroeconomic parameters.

Keywords: Cauchy problem, stochastic differential equation, income functional, optimal control, controlled portfolio.

JEL Classification: C02, G11.