Тогда из формулы (9) видно, что первое распределение мы производим по наименьшим расстояниям. Для каждого фиксированного $j$ находим $i$, для которого равенство (9) выполнено, т. е. за каждой фабрикой закрепляем одну или несколько шахт, номера которых соответствуют минимальному $\lambda_{jk}$. Кроме того, выбираем определенным образом $\varepsilon$ — окрестность каждого минимального $\lambda_{jk}$ с тем, чтобы в загрузке $j$-й фабрики участвовали и те шахты, для которых $\lambda_{jk}$ лежат в $\varepsilon$-окрестности минимального $\lambda_{jk}$. Потребность обогатительной фабрики в угле $k$-й марки удовлетворяем полностью поставками с шахт, набранных таким образом. Поступаем так до тех пор, пока не переберем все фабрики (т. е. все $j$). Получим первое распределение, т. е. определим величины $\bar{x}_{ijk}$.

Эти величины подставляем в выражения (2) и (4) и находим разности между правыми и левыми частями неравенств:

$$P_{ik} - \sum_{j=1}^{m} \bar{x}_{ijk} = \Delta P_{ik},$$

$$A_j - \sum_{k=1}^{l} \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\bar{x}_{ijk} = \Delta A_j,$$

$$S_j - \sum_{k=1}^{l} \sum_{i=1}^{n} s_{ik}\bar{x}_{ijk} = \Delta S_j,$$

Затем определяем новые значения потенциалов:

$$u_i' = u_i^0 - h_1 \Delta P_{ik},$$

$$\theta_j' = \theta_j^0 - h_2 \Delta A_j,$$

$$\xi_j' = \xi_j^0 - h_3 \Delta S_j,$$

где $h_1$, $h_2$, $h_3$ — шаги изменения потенциалов, которые выбираются заранее и уменьшаются через определенное количество итераций.

Если значение потенциалов становится отрицательным, то такие потенциалы полагаем равными нулю.

Изменением потенциалов заканчивается одна итерация.

На второй итерации получаем новый план распределения с учетом новых значений потенциалов, полученных в конце первой итерации. По этой же методике производится распределение углей между обогатительными фабриками на всех последующих итерациях.

Итерационный процесс считается законченным после выполнения определенного числа итераций (в среднем около 600), которое зависит от скорости сходимости процесса.

По обобщенному методу градиентного спуска задача указанных размеров была решена на ЭВМ М-20 в течение 2,5 часа. Полученное в результате решения распределение коксующихся углей между обогатительными фабриками дает возможность снизить общий тоннокилометраж на 873 750 000 *т/км*. Пробег 1 *т* угля по железной дороге по сравнению с существующим снизился на 12,5 *км*.

Поступила в редакцию
8 VII 1965

---

# ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Н. Е. ЛАРЧЕНКО

*(Москва)*

Решение общей задачи линейного программирования

$$\tilde{x}P_1 + \ldots + \tilde{x}_{n-m}P_{n-m} + \tilde{x}_{n-m+1}P_{n-m+1} + \ldots + \tilde{x}_n P_n = P_0, \tag{1}$$

$$\tilde{X} \geqslant 0, \tag{2}$$

$$c\,\tilde{X} \to \min \tag{3}$$

связано с системой линейных уравнений

$$B\tilde{X} = P_0, \tag{4}$$

где $B$ — базис оптимального плана; $\tilde{X}$ — вектор-столбец, составленный из коэффициентов разложения вектора $P_0$ в базисе $B$.

Пусть в качестве базиса начального опорного плана принят единичный базис $(P_{n-m+1}, \dots, P_n)$. Тогда в итоговой симплексной таблице на месте матрицы $(P_{n-m+1}, \dots, P_n)$ получим матрицу $B^{-1}$. Числа в столбце матрицы $B^{-1}$, расположенном на месте вектора $P_{n-m+i}$ $(i = 1, \dots, m)$, показывают, насколько изменятся переменные оптимального плана, если ограничение, содержащее переменную $\tilde{x}_{n-m+i}$, ослабить на единицу. Показатель в индексной строке соответствующего столбца указывает, насколько изменится при этом величина функции цели.

Таким образом, мы располагаем средством, позволяющим оценивать влияние на переменные оптимального плана и на величину функции цели возможных колебаний в значениях свободных членов уравнений (1). Но нам не известно, как будут вести себя переменные оптимального плана в случае, когда меняются их коэффициенты, т. е. элементы матрицы $B$ *. Вопросу учета всех упомянутых влияний на переменные оптимального плана посвящена настоящая статья.

Для простоты обозначений, но без ограничения общности положим, что в базис оптимального плана вошли первые $m$ векторов исходной системы, т. е.

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}.$$

Обозначим матрицу поправок к элементам $B$ через $R$:

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{m1} & \cdots & r_{mm} \end{pmatrix},$$

а столбец поправок к элементам $P_0$ через $R_0$: $R_0 = (r_{10}, \dots, r_{m0})^T$. Будем отыскивать поправки $\Delta X = (\Delta x_1, \dots \Delta x_m)^T$ к переменным оптимального плана $\tilde{X} = (x_1, \dots, x_m)^T$, где $\tilde{x}_i \geqslant 0$ для всех $i = 1, \dots, m$.

Учитывая (4), получим

$$B\Delta X = R_0 - R\tilde{X} - R\Delta X. \tag{5}$$

Левые части уравнений (5) имеют ту же матрицу коэффициентов, что и уравнения (4). Вектор $\tilde{X}$ становится известным после решения задачи, а $R$ и $R_0$ предполагаются заданными. Член $R\Delta X$ в нулевом приближении можно не учитывать. Тогда

$$\Delta X^{(0)} = B^{-1}P'^{(0)}_0, \tag{6}$$

где $P'^{(0)}_0 = R_0 - R\tilde{X}$. Соответствующее изменение функционала равно

$$\Delta c^{(0)} = c\Delta X^{(0)}. \tag{7}$$

Если исходная задача решалась методом обратной матрицы, то $\Delta X^{(0)}$ и $\Delta c^{(0)}$ получают в последней симплексной таблице, используя непосредственно (6) и (7). При реализации обычного алгоритма метода последовательного улучшения плана для получения $\Delta X^{(0)}$ и $\Delta c^{(0)}$ нужно присоединить к исходной симплексной таблице дополнительный столбец $P_0'$ с показателем «нуль» в индексной строке и проделать над ним те же действия, что и над всеми столбцами исходной матрицы. Зная $\Delta X^{(0)}$, при необходимости можно вычислить $R\Delta X^{(0)}$ и затем

$$P'^{(1)}_0 = R_0 - R\tilde{X} - R\Delta X^{(0)} = P'^{(0)}_0 = R\Delta X^{(0)}$$

Таким образом, получим более точно элементы столбца свободных членов в выражении (5) и, умножив этот столбец на $B^{-1}$, найдем $\Delta X^{(1)}$ и $\Delta c^{(1)}$. Поправки $\Delta X^{(1)}$ можно, в свою очередь, использовать для получения $\Delta X^{(2)}$ и т. д.

Перепишем (5) так:

$$\Delta X = -B^{-1}R\Delta X + B^{-1}(R_0 - R\tilde{X}). \tag{8}$$

---

* Ясно, что колебание (в пределах известной устойчивости оптимального плана) коэффициентов при переменных, получивших в оптимальном плане нулевое значение, не изменит окончательного решения.

Для сходимости итерационного процесса (8) необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы $-B^{-1}R$ были по модулю меньше единицы. Отсюда следует, что итерационный процесс (8) будет сходящимся, если хотя бы одна из норм матрицы $-B^{-1}R$ меньше единицы.

*Таблица 1*

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i$ | $B$ | $c$ | $P_0$ | $P_1$ | $P_4$ | $P_6$ | $P_0'^{(0)}$ | $P_0'^{(1)}$ | $P_0'^{(2)}$ | $P_0'^{(3)}$ | $P_0''^{(0)}$ | $P_0''^{(1)}$ | $P_0''^{(2)}$ | $P_0''^{(3)}$ |
| 1 | $P_2$ | 1 | 4 | 0,4 | 0,1 | 0 | −1,6 | −1,12 | −1,264 | −1,221 | 0,06 | 0,042 | 0,047 | 0,046 |
| 2 | $P_3$ | −3 | 5 | 0,2 | 0,3 | 0 | −0,8 | −0,56 | −0,632 | −0,610 | 0,04 | 0,028 | 0,032 | 0,031 |
| 3 | $P_6$ | 0 | 11 | 1 | −0,5 | 1 | −4 | −2,80 | −3,160 | −3,052 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | | | −11 | −0,2 | −0,8 | 0 | 0,8 | 0,56 | 0,632 | 0,610 | | | | |

Для поправок $\Delta w = (\Delta w_1, \ldots, \Delta w_m)^T$ к переменным $\widetilde{w} = (\widetilde{w}_1, \ldots, \widetilde{w}_m)^T$ задачи, двойственной задаче (1)—(3), можно, используя $\widetilde{w}B = c$, аналогично вывести соотношение $\Delta wB = -\widetilde{w}R - \Delta wR$.

Последовательные приближения вычисляются по формуле

$$\Delta w^{(k)} = \underset{0}{P}''^{(k)} B^{-1}, \tag{9}$$

где $\underset{0}{P}''^{(k)} = -\widetilde{w}R - \Delta\widetilde{w}^{(k-1)}R$.

Выше приведена итоговая симплексная таблица (графы 1—7 таблицы), полученная при решении методом обратной матрицы следующей задачи *: минимизировать $x_2 - 3x_3 + 2x_5$ при условиях:

$$\begin{gathered} \widetilde{x}_1 + 3\widetilde{x}_2 - \widetilde{x}_3 + 2\widetilde{x}_5 = 7, \\ -2\widetilde{x}_2 + 4\widetilde{x}_3 + \widetilde{x}_4 = 12, \\ -4\widetilde{x}_2 + 3\widetilde{x}_3 + 8\widetilde{x}_5 + \widetilde{x}_6 = 10, \\ \widetilde{x}_j \geqslant 0 \text{ для всех } j = 1, \ldots, 6. \end{gathered}$$

Решение этой задачи дает

$$B = (P_2P_3P_6) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0 \\ 1 & -0{,}5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Изменим первую координату векторов $P_2$, $P_3$ и $P_0$ на $+0{,}5$, т. е.

$$R = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

С точностью до третьего десятичного знака значения неизвестных, удовлетворяющих изменившимся условиям и приводящих к минимуму функции цели, следующие:

$$x_2 = 2{,}769, \qquad x_3 = 4{,}384, \qquad x_6 = 7{,}922.$$

Для определения $\Delta X$ были сделаны три итерации (см. графы 8—11 таблицы). На последней итерации получены следующие значения неизвестных:

$$x_2^{(3)} = 2{,}779, \qquad x_3^{(3)} = 4{,}390, \qquad x_6^{(3)} = 7{,}948,$$

которые, будучи подставлены в выражение для функции цели, изменяют ее величину на 0,610.

В графах 12—15 табл. 1 показано последовательное нахождение поправок $\Delta w$ к переменным двойственной задачи. Переменные $w$, найденные с помощью поправок на третьей итерации, совпадают с точностью до трех знаков после запятой с истинным значением этих переменных:

$$w_1 = -0{,}154, \qquad w_2 = -0{,}769, \qquad w_3 = 0.$$

* Задача заимствована из книги С. Гасса «Линейное программирование», М., Физматгиз, 1961, стр. 85.

В случае необходимости итерационный процесс можно было бы продолжить и получить более близкое приближение к искомым величинам.

Заметим, что в случаях, подобных рассмотренному выше, когда меняются параметры лишь одного из ограничений, поправки $\Delta X$ можно получить значительно проще, используя взаимную пропорциональность столбцов $P_0'^{(k+1)}$ и $P_0'^{(k)}$; $\Delta X^{(k+1)}$ и $\Delta X^{(k)}$, т. е. $P_0'^{(k+1)} = qP_0'^{(k)}$; $\Delta X^{(k+1)} = q\Delta X^{(k)}$.

Имеются две возможности применения предлагаемой методики отыскания поправок:

1) когда более точные и надежные исходные данные стали доступны уже после того, как задача была решена.

2) когда необходимо оценить влияние неустранимой погрешности исходных данных на точность определения искомых величин.

Первый случай встречается в практике довольно часто, причем иногда к моменту, когда поступает дополнительная информация об исходных данных, уже нет под руками материалов, относящихся к решению задачи (перфокарт, перфолент или других носителей информации, если она решалась вручную). Но если сохранилась матрица $B^{-1}$, то этого достаточно, чтобы вычислить $\Delta X$, пользуясь непосредственно соотношением (6). Поэтому после решения любой задачи симплексным методом полезно выписывать не только столбец результатов $\tilde{X}$, но также и матрицу $B^{-1}$, тем более, что информация, заключенная в ней, может оказать помощь при экономико-математическом анализе решения.

Вторая возможность применения описанной методики представляется нам не менее важной. Нередки еще случаи, когда, имея весьма приближенные исходные данные с одной-двумя верными цифрами, вычисляют неизвестные с семью-восемью цифрами, создавая этим иллюзию, будто точность получения неизвестных зависит лишь от количества удержанных при вычислениях знаков. Между тем из теории вычислений с приближенными числами известно, что результат, вообще говоря, нельзя получить точнее, чем исходные данные.

Численно оценить влияние погрешностей исходных данных на переменные поможет предлагаемая методика. Если о коэффициентах при переменных известно лишь, что это числа округленные, то можно положить их ошибку равной $+0{,}5$ единицы последнего знака. Тогда элемент $\Delta x_i$ столбца $\Delta X$ примерно будет характеризовать предельную ошибку переменной $\tilde{x}_i$, вызванную округлением коэффициентов при переменных.

Уточненные значения переменных, найденные с применением методики, будут допустимыми, если

$$\Delta X \geqslant -\tilde{X}, \tag{10}$$

и оптимальными, если

$$(\tilde{w} + \Delta w)A_0 \leqslant c, \tag{11}$$

где $A_0$ — изменившаяся матрица условий задачи (1) — (3). Одновременное выполнение (10) и (11) является условием применимости методики. Для нашего примера выполнение условия (9) очевидно, а также

$$(\tilde{w} + \Delta w)A_0 = (-0{,}154;\ 1;\ -3;\ -0{,}769;\ -0{,}308;\ 0) \leqslant c = (0;\ 1;\ -3;\ 0;\ 2;\ 0).$$

Следовательно, план $\tilde{X} + \Delta X$ есть оптимальный план измененной задачи (1) — (3).

Поступила в редакцию
2 XII 1965

---

# ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОЙ ВНУТРИХОЗЯЙСТВЕННОЙ ОРГАНИЗАЦИИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ОРОСИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

В. А. КАРДАШ, В. Г. ПРЯЖИНСКАЯ

*(Новосибирск)*

Обычно планирование в сельском хозяйстве ведется в расчете на средненормальные для данного района погодные условия. Все отклонения от них, случающиеся особенно часто в зонах неустойчивого увлажнения, делают планово-экономические расчеты практически малопригодными.

Учет случайных факторов особенно существен в расчетах по орошаемому земледелию. В приведенной ниже модели, построенной на основе линейного программирования [1], предлагается использовать при оптимальном перспективном планирова-