В той части, в какой эти условия требуют изменения периода профессиональной подготовки, они учитываются в предлагаемой схеме оценки степени сложности труда. Но вводить какие-либо специальные коэффициенты либо иные расчетные величины для какого-то отдельного учета производственных условий при оценке степени сложности труда, с нашей точки зрения, не следует. Величины полных затрат труда на обучение работников, рассчитанные предполагаемым методом, можно использовать также и для конкретной оценки трудового ресурса.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Кат е ль. К вопросу о методологии измерения труда в промышленности. Вопросы труда, 1932, № 8, 9.
2. Б. Н. Михалевский. Оценка квалифицированной рабочей силы в малоразмерной модели перспективного планирования. Экономика и матем. методы, 1965, т. I, вып. 6.
3. М. И. Туган-Барановский. Социализм как положительное учение. Петроград, 1918.
4. В. Н. Позняков. Квалифицированный труд и теория ценности Маркса. М., Изд. Коммунистического ун-та им. Я. М. Свердлова, 1925.
5. Ф. М. Волков. Расширенное воспроизводство квалифицированной рабочей силы в СССР, М., Соцэкгиз, 1961.
6. В. Ф. Майер. Заработная плата в период перехода к коммунизму. М., Экономиздат, 1963.
7. Е. И. Капустин. Качество труда и заработная плата. М., «Мысль», 1964.
8. Я. И. Гомберг. Редукция труда. М., «Экономика», 1965.
9. М. Р. Эйдельман. Межотраслевой баланс общественного продукта. М., «Статистика», 1966.
10. А. Я. Боярский. Математико-экономические очерки. М., Госстатиздат, 1962.
11. Н. Е. Рабкина, Н. М. Римашевская. Дифференциация заработной платы и ее прогнозирование. Экономика и матем. методы, 1965, т. I, вып. 6.

Поступила в редакцию
1 IX 1966

ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1967
том III, вып. 3

МЕТОД ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК

Ю. В. КИСЕЛЕВ

(Ленинград)

При вероятностном моделировании сложных систем управления требуется много количественных данных. Статистический опыт, расчет, экперимент — вот основные источники необходимой информации. Однако часто случается так, что при отсутствии соответствующей литературы необходимую количественную характеристику нельзя получить ни расчетным, ни экспериментальным путем. В таких случаях целесообразно применить метод экспертных оценок. Дело в том, что даже тогда, когда необходимая количественная характеристика неизвестна, относительно ее у специалистов имеется интуитивная информация. Конечно, эта информация в значительной степени является неопределенной, при этом степень неопределенности зависит от уровня знаний. Задача заключается в том, чтобы извлечь эту неясную информацию и придать ей математическую форму.

Сущность метода экспертных оценок заключается в том, что неизвестная количественная характеристика рассматривается как случайная величина, отражением закона распределения которой является индивидуальное мнение специалиста-эксперта. Считается, что специалист-эксперт может дать количественную оценку некоторым характерным точкам распределения, исходя из которых строится вероятностная математическая модель искомой величины.

В большинстве практических задач разумно предположить, что неизвестная количественная характеристика T, рассматриваемая как случайная величина, с точки зрения специалиста-эксперта имеет непрерывную одномодальную ограниченную по абсциссе функцию распределения. В этом случае целесообразно в качестве математической модели выбрать бета-распределение, как обладающее наибольшей гибкостью среди всех практически применяемых распределений этого класса.

Как известно, плотность вероятности бета-распределения выражается формулой

$$f(t) = \frac{(t-a)^{p-1}(b-t)^{q-1}}{(b-a)^{p+q-1}B(p,q)} \quad \text{при } a \leqslant t \leqslant b,$$

$$f(t) = 0 \qquad \text{при } t < a \text{ или } t > b,$$

где $B(p, q)$ — бета-функция; p, q, a, b — параметры распределения; при этом a и b определяют соответственно левую и правую границы распределения [1].

Используя стандартные приемы, нетрудно получить выражение для математического ожидания E, моды M и дисперсии D:

$$E = a + (b-a)\frac{p}{p+q},$$

$$M = a + (b-a)\frac{p-1}{p+q-2},$$

$$D = (b-a)^2 \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}.$$

Рассматривая эти выражения как систему уравнений и исключая p и q, получаем равенство, связывающее величины E, M, D, a, b:

$$E^3 + (-a-b-M)E^2 + (ab + aM + bM + D)E + \\ + (aD + bD - abM - 3DM) = 0.$$

Однако для практических расчетов оно неудобно из-за сложности. Анализ показывает, что рассматриваемое равенство допустимо и целесообразно аппроксимировать более простым выражением

$$E = \frac{a + gM + b}{g+2},$$

где коэффициент

$$g = \frac{(b-a)^2}{6D} - 2$$

определяет степень весомости модального значения по отношению к крайним точкам распределения.

Если считать, что специалист-эксперт может количественно оценить моду и граничные точки распределения, то для расчета наиболее важной характеристики распределения — математического ожидания — теперь не хватает только коэффициента g. Поскольку эксперт оценивает только три точки, а бета-распределение является четырехпараметрическим, имеется некоторая свобода в выборе весового коэффициента g (или дисперсии, так как g теперь можно рассматривать как функцию от D). Используя эту свободу для получения по возможности простых расчетных формул, целесообразно положить, что дисперсия определяется только квадратом размаха и пропорциональна ему:

$$D = k(b-a)^2.$$

Математически это эквивалентно тому, что из множества бета-распределений выбирается класс, для которого справедливо отношение:

$$\frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)} = k,$$

где $k = \text{const}$.

Тогда формула для весового коэффициента g принимает вид:

$$g = \frac{1}{6k} - 2.$$

Теперь, имея экспертные оценки для a, b, M и задаваясь k, легко найти используемые при практических расчетах E и D.

Заметим, что как частные случаи имеем при $k = 0$ дельта-распределение ($E = M$, $D = 0$), при $k = {}^1/_{12}$ — равномерное распределение ($E = (a+b)/2$, $D = (b-a)^2/12$, при $k = {}^1/_{36}$ — распределение, используемое в системе ПЕРТ ($E = (a + 4M + b)/6$; $D = (b-a)^2/36$).

Но какое k выбрать?

Если эксперт может оценить три характерные точки распределения, то нельзя ли пойти дальше и попробовать построить псевдостатистическую функцию распределения, рассматривая ее как результат мысленного эксперимента? Это позволит отказаться от каких-либо искусственных допущений относительно вида закона распределения и его параметров.

С целью выяснения такой возможности автором были проведены эксперименты по построению псевдостатистических функций распределения применительно к неизвестному времени, потребному для выполнения какой-либо технической операции. Методика построения псевдостатистической функции распределения была такова.

На оси времени эксперт выбирал шесть — восемь точек, при этом левая точка соответствовала минимально возможному, а правая — максимально возможному времени, потребному для выполнения операции. Далее каждой выбранной точке эксперт ставил в соответствие число в интервале 0—100, которое служило ответом на вопрос, сколько шансов из 100, по мнению эксперта, за то, что операция будет выполнена в течение времени, меньшего, чем то, которое определяется данной точкой. Другими словами, определялась псевдостатистическая интегральная функция распределения с числом точек шесть — восемь.

В качестве экспертов использовались инженеры, по роду деятельности занятые планированием пуско-наладочных работ при вводе в строй комплексов новой техники. Именно применительно к такого рода работам и строились псевдостатистические функции распределения. Всего в эксперименте участвовало 10 человек, каждый из которых строил псевдостатистическую функцию распределения для времени выполнения 10 операций. Полученные функции распределения обрабатывались обычными статистическими приемами.

В процессе эксперимента было выяснено, что оптимальное число точек оценки, включая крайние, составляет шесть, так как при меньшем числе точек псевдостатистическая функция слишком «груба», а при большем числе точек смежные ординаты («шансы») становятся для эксперта неразличимыми в силу его ограниченной «разрешающей способности».

Эксперименты показали, что такой подход приемлем только для экспертов, практически владеющих основами теории вероятностей. Эксперты, не владеющие этим математическим аппаратом, проявляют явную тенденцию к использованию линейной интерполяции при оценке ординат («шансов») промежуточных точек. В каждом эксперименте вычислялись первые два момента распределения и затем отношение псевдостатистической дисперсии к квадрату псевдостатистического размаха, т. е. коэффициент $k = D/(b-a)^2$. Усреднение по всем экспериментам дало $k = 0{,}04$. Другой обработки экспериментальных данных не проводилось.

Учитывая, что многооценочная методика, во-первых, требует от эксперта практического знания основ теории вероятностей, а во-вторых, при массовом применении (как это имеет место в сетевом планировании) ведет к существенному усложнению расчетов, использование ее в общем случае не является целесообразным. Такой подход следует рекомендовать только при условии явной неприменимости модели бета-распределения. На практике это обычно имеет место в тех редких ситуациях, когда интуитивно ясно, что функция плотности распределения неизвестной характеристики не может быть одномодальной. Примером подобной ситуации является необходимость оценить длительность сезонной работы, которая может быть закончена либо в первом, либо во втором сезоне, но не в промежутке между ними.

Возвращаясь к трехоценочной методике и принимая

$$k = \frac{D}{(b-a)^2} = 0{,}04,$$

легко получаем *окончательные* расчетные формулы для математического ожидания и дисперсии:

$$E = \frac{a + 2M + b}{4}, \quad D = 0{,}04(b-a)^2.$$

Если с целью сокращения объема исходной информации постулировать равенство $M = a + {}^1/_3(b-a)$, как это делает Д. И. Голенко [2], то после подстановки и округления получим рекомендуемые им двухоценочные формулы:

$$E = 0{,}584a + 0{,}416b \approx \frac{3a + 2b}{5}, \quad D = 0{,}04(b-a)^2.$$

Две пары приведенных выше соотношений для определения математического ожидания и дисперсии, трехоценочные и двухоценочные, образуют *непротиворечивую* (с точностью до принятого для практических целей округления) систему расчетных формул.

Преимущество трехоценочной методики по сравнению с двухоценочной состоит в том, что область ее применения шире, как и вообще область применения распределения с бо́льшим числом свободных параметров. Недостатком же ее является увеличение необходимого объема исходной информации, степень доверия к которой к тому же не слишком велика.

Если говорить не о сетевом планировании, а о вероятностном моделировании сложных систем управления вообще, то автор отдает предпочтение трехоценочной методике, так как это позволяет пользоваться одними и теми же расчетными формулами для определения математического ожидания и дисперсии весьма широкого класса случайных величин, имеющих различную физическую природу.

Поскольку рекомендуемые в настоящей статье трехоценочные формулы отличаются от тех, которые были введены в практику авторами американской системы ПЕРТ, в сторону несколько повышенного значения дисперсии, следует сделать следующее замечание.

Трудно предположить, что авторы системы не видели, что их подход ведет к заниженной по сравнению с действительностью оценке дисперсии. Большое количество срывов сроков при выполнении заказов с применением метода ПЕРТ тому свидетельство. Однако признание того, что вероятность выполнения заказа в приемлемые сроки ниже, пусть даже незначительно, чем рекламируемая, в условиях жесткой конкуренции является крайне нежелательным. В силу этого обстоятельства американский подход не может служить эталоном.

Возможно, что дальнейшие исследования и практический опыт приведут к изменению расчетных формул. Поэтому при составлении стандартных машинных программ, реализующих эти формулы в ходе моделирования сложных систем управления, следует ориентироваться на более общие соотношения:

$$E = \frac{\gamma_1 a + \gamma_2 M + \gamma_3 b}{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}, \quad D = \gamma_4 (b-a)^2,$$

где γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 — варьируемые коэффициенты. По мнению автора, численные значения этих коэффициентов при трехоценочной методике в общем случае должны быть таковы: $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 2$, $\gamma_3 = 1$; $\gamma_4 = 0{,}04$.

Описанная методика разработана для случая, когда в экспертизе участвует один специалист или группа специалистов, согласовавших свои оценки. А как быть, если оценки разных специалистов не согласованы? В качестве математической модели коллективного мнения n экспертов относительно неизвестной величны T, которая рассматривается как случайная, можно предложить составное распределение с функцией плотности

$$f_0(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(t),$$

где $f_i(t)$ — плотность распределения, построенного по описанным выше правилам на основании информации, полученной от i-го эксперта; α_i — весовой показатель i-го эксперта, при этом $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

Введем следующие обозначения:

E_0 и D_0 — соответственно математическое ожидание и дисперсия рассматриваемой величины по оценке коллектива экспертов; E_i и D_i — соответственно математическое ожидание и дисперсия рассматриваемой величины по оценке i-го эксперта.

Необходимо найти E_0 и D_0 по известным E_i и D_i.

Прямым вычислением моментов распределения нетрудно показать, что:

$$E_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_i, \qquad D_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i D_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (E_i - E_0)^2.$$

Так как индивидуальные расчетные оценки математического ожидания E_i и дисперсии D_i уже известны, то для решения задачи остается определить весовые показатели экспертов α_i.

Если нет оснований отдавать предпочтение одним экспертам перед другими, то следует положить $\alpha_i = 1/n$ для всех i. Однако на практике люди, используемые в качестве экспертов, обладают различным опытом, эрудицией. С учетом этих факторов часто удается ввести систему ранговых предпочтений экспертов, т. е. положить, что $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_i \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n$.

Существует неограниченный набор положительных числовых последовательностей, удовлетворяющих этой системе неравенства и равенству

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

Руководствуясь принципом получения по возможности простых расчетных формул, разумно выбрать в качестве искомой последовательности убывающую арифметическую прогрессию. Так как число экспертов равно n, то эксперт, имеющий ранг $n+1$, должен иметь весовой показатель $\alpha_{n+1} = 0$ (фиктивный эксперт). Таким образом, имеются три параметра, полностью определяющие арифметическую прогрессию: 1) число членов прогрессии, равное $n+1$; 2) последний, $(n+1)$-й член, равный 0; 3) сумма членов прогрессии, равная 1.

Используя свойства арифметической прогрессии, легко получить выражение для общего члена искомой последовательности весовых показателей:

$$\alpha_i = [2(n - i + 1)]/[n(n + 1)].$$

Теперь известно все, что необходимо для расчета величин E_0 и D_0, отражающих мнение коллектива экспертов. Обратим внимание на то, что E_0 есть средневзвешенная сумма всех E_i, а D_0 больше средневзвешенной суммы всех D_i (исключая те тривиальные случаи, когда или $E_i = E_0$ для всех i, или $\alpha_i = 0$ для всех $i \neq j$ и $\alpha_j = 1$).

Используя не слишком строгую терминологию, можно сказать, что так как дисперсия есть мера неопределенности, то из математической модели коллективной оценки вытекает следующее. Неопределенность коллективного мнения в общем случае выше, чем средняя неопределенность мнения отдельного эксперта.

Наибольшее распространение метод экспертных оценок в настоящее время находит в сетевом планировании, где таким способом определяется длительность выполнения каждой операции, входящей в сетевой план. Практика расчета индетерминированных сетей по оценкам одного эксперта показывает, что получающаяся при таком расчете дисперсия продолжительности критического пути получается слишком заниженной (даже при применении формулы $D = (b-a)^2/25$, не говоря уже о формуле $D = (b-a)^2/36$). Использование моделей коллективной оценки устраняет этот недостаток и, кроме того, уменьшает влияние субъективных ошибок.

Итак, метод экспертных оценок позволяет выразить нечеткую, интуитивную информацию специалистов-экспертов в теоретико-вероятностных терминах. При этом понятие «вероятность» в данном аспекте имеет смысл меры ожидаемости.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. В. Дунин-Барковский, Н. В. Смирнов. Теория вероятностей и математическая статистика в технике (общая часть). М., Гостехиздат, 1955.
2. Д. И. Голенко. Теоретико-вероятностные вопросы сетевого планирования во времени. В сб. Вычислительные системы, вып. 11. Изд. Сиб. отд. АН СССР, Новосибирск, 1964.

Поступила в редакцию
6 X 1965

ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1967
том III, вып. 3

ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ С НЕСКОЛЬКИМИ ЦЕЛЕВЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Х. ЮТТЛЕР

(ГДР)

Постановка задачи. Существуют некоторые методы математического программирования, позволяющие выбирать из многочисленных допустимых годовых производственных программ такой вектор производства, который приводит к минимуму или к максимуму определенной величины в зависимости от заданной цели. До сих пор на практике приходилось довольствоваться методом линейного программирования, так как, несмотря на приближенный его характер, он представляет собой значительный шаг вперед по сравнению с применяющимися ненаучными методами решения подобных задач.

Модель линейного программирования для рассматриваемой здесь задачи будет использована в следующей форме. Пусть требуется определить производственную программу, оптимальную относительно заданной цели

$$C^T X \to \text{ext} \tag{1}$$

при условиях:

$$AX = b, \tag{2}$$

$$X \geqslant 0. \tag{3}$$

Искомый оптимальный вектор производства обозначается через X, вектор коэффициентов целевой функции — через C. Условия, которые следует учесть в годовой производственной программе, даны системой уравнений (2). Как известно, условия задачи, которые встречаются обычно в форме неравенств, приводятся к указанной выше форме равенств. Итак, строкам матрицы A соответствуют все виды затрат (группы машин, виды материалов и т. д.), интересующие нас в задаче.

В этой системе могут естественно содержаться ограничения объема производства. На размер матрицы влияют, с одной стороны, производственные условия и, с другой стороны, технические возможности действующей ЭВМ. Последние часто приводят к необходимости значительно сокращать размер системы условий.

Соответствующие отдельным строкам матрицы A компоненты вектора b указывают ограничения видов затрат или объемов производства, которые установлены для подлежащей расчету годовой производственной программы. Неравенства (3) представляют собой обыкновенные условия неотрицательности.

Одна из проблем, еще не выясненная в рамках практического применения названной модели, состоит в том, что не установлен единый критерий оптимальности для социалистического промышленного предприятия.

Некоторыми критериями оптимальности, предложенными до сих пор и используемыми в практических расчетах, занимались Хейде и Мартенс [1]. Они констатировали, что еще не найден общепризнанный и теоретиче-