производственных программ, при которых максимальное отклонение по отношению ко всем критериям оптимальности является меньшим, чем в случае «оптимальной компромиссной программы».

В дальнейшем нужно предусмотреть расширение модели в смысле построения многогранной модели игры, которой было бы охвачено в конце концов все множество допустимых (2) и (3) решений. Такое расширение, естественно, имеет смысл только в том случае, если одновременно найдены возможности, которые позволяют вновь сократить это множество таким образом, чтобы принимались во внимание лишь те точки решения, которые, по всей вероятности, будут влиять на оптимальную смешанную стратегию. Эта постановка задачи должна быть предметом дальнейших исследований.

Если только принимается во внимание небольшое число критериев, расширение может произойти на основе взаимосвязи субоптимальных решений, соответствующих различным критериям. Эти субоптимальные решения будут все равно получены при вычислениях симплекс-методом. Матрица G^* в этом случае не является квадратной, однако она по-прежнему не обладает седловой точкой. Может случиться, что в качестве оптимальной стратегии 1-го игрока получится чистая стратегия, т. е. одно из этих субоптимальных решений. Дальнейшая возможность расширения опирается на взаимосвязь имеющихся многократных решений, соответствующих единичным оптимизациям. Здесь матрица G^* также не является квадратной.

При практическом проведении вычислений следует оценивать, нужно ли сокращать объем вычислительных операций. На практике при оптимизации производственных программ имеется едва ли более четырех или пяти критериев, которые одновременно нужно учесть, поэтому названные возможности расширения (учет субоптимальных векторов решений или многократных решений) не могут привести к значительному увеличению объема вычислительных операций.

Этот вывод, безусловно, может использоваться, тогда численное решение матричной игры может проводиться, например, симплекс-методом. При четырех или пяти критериях могут использоваться, таким образом, еще многие субоптимальные решения.

Использовать возможности расширения следует только в том случае, если для других критериев также имеются различные субоптимальные решения подходящих численных значений.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Heyde, O. Martens. Methodische Probleme dez Zielfunktionen bei der Ermittlung Optimaler Produktionsprogramm mit Hilfe der linearen Optimierung, Wirtschaftswissenschaft, 1964, 12, № 6, 898—908.
2. O. Habr, O. Borak. Erfahrungen mit der Anwendung von mathematischen Methoden bei der Lösung von komplizierten ökonomischen Problemen in der Industriepraxis, Materialien der Internationalen Konferenz in Warschau vom 9.— 14.7.1962, Sektion I, Thema 9.
3. O. Radzikowski. Methoden zur Einbeziehung mehr als einer Zielfunktion bei der Optimierungsrechnung. Mitteilung des Instituts für Elektrotechnik (Miedzylesie bei Warschau). Vortragsmanuskript für die mehrseitige Institutskonferenz 1965 in Oberbärenburg, DDR.
4. H. Jüttler. Über spieltheoretische Entscheidungssituationen. Konferenzprotokoll der Konferenz über «Mathematik und Kybernetik in der Ökonomie», Teil I. Akademie-Verlag Berlin, 1964.

Поступила в редакцию
24 V 1966

ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1967 том III, вып. 3

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ОБМЕНА

Б. Г. ПИТТЕЛЬ

(Ленинград)

Рассмотрим следующую модель обмена. Пусть имеется m предпринимателей $A_1, A_2, \ldots, A_m$, владеющих продуктами $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Будем считать, что предприниматель A_i владеет этими продуктами в количествах $\beta_{i1}, \beta_{i2}, \ldots, \beta_{in}$. Вступая в обменные соглашения, предприниматель A_i в итоге будет иметь продуктов в некоторых количествах $y_i = (y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{in})$. Предположим, что количество ассортиментного набора y_i предприниматель A_i оценивает значением функционала:

$$f_i(y_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} y_{ij}, \quad \alpha_{ij} \geqslant 0 \tag{1}$$

Ясно, что все возможные для предпринимателя A_i ассортиментные наборы y_i должны удовлетворять бюджетному ограничению

$$\sum_j y_{ij} p_j \leqslant \sum_j \beta_{ij} p_j, \quad y_{ij} \geqslant 0, \tag{2}$$

если цены на продукты равны соответственно $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Определение. *Вектор $\bar{p} = (\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_n)$ называется равновесным вектором цен, если существуют наборы $\bar{y}_i$, которые, во-первых, максимизируют $f_i(y_i)$ при ограничениях (2) и, во-вторых, такие, что*

$$\sum_i \bar{y}_{ij} = \beta_j = \sum_i \beta_{ij}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Равенство (3) — условие равенства спроса и предложения на все продукты.

В настоящей работе доказывается, что при некоторых естественных условиях равновесные цены существуют и их свойства исследуются.

Предложенная модель, вообще говоря, не сводится к частному случаю модели, рассмотренной в [1, § 7]. Однако результаты упомянутой работы могут быть использованы при доказательстве существования равновесия в предлагаемой модели. В статье применяется существенно другой способ доказательства, который, мы надеемся, может иметь самостоятельный интерес.

В [2], а также [3], рассматривалась экономическая модель, содержащая m покупателей $A_1, \ldots, A_m$, владеющих деньгами в количествах $c_1, \ldots, c_m$, и рынок, предлагающий покупателям продукты $B_1, B_2, \ldots, B_n$ в количествах $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. Предполагалось, что покупатель A_i качество покупки $y_i = (y_{i1}, \ldots, y_{in})$ оценивает значением функционала (1). Вводилось определение равновесных цен $\bar{p}$ — цен, при которых существуют наборы $\bar{y}_i$, максимизирующие функционалы (1) при бюджетном ограничении $\sum_j y_{ij}\bar{p}_j \leqslant c_i$ и удовлетворяющие условию равенства спроса и предложения $\sum_i y_{ij} = \beta_j$. При условии, что в любом столбце и любой строке матрицы $\{\alpha_{ij}\}$ есть хотя бы один ненулевой элемент, в [2] доказана теорема существования и единственности равновесных цен. При этом получен, на наш взгляд, очень интересный результат, утверждающий, что равновесные наборы $\bar{y}_i$ максимизируют функционал $F(y) = \sum_i c_i \ln\Big(\sum_j \alpha_{ij} y_{ij}\Big)$ при ограничениях $y_{ij} \geqslant 0, \sum_i y_{ij} = \beta_j$, а равновесные цены $\bar{p} = (\bar{p}_1, \ldots$ $\ldots, \bar{p}_n)$ определяются равенствами $\bar{p}_j = \max_i F'_{\bar{y}_{ij}}$. Последнее условие означает, по существу, что цены $\bar{p} = (\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_n)$ являются лагранжевыми множителями, соответствующими в этой задаче максимизации ограничениям $\sum_i y_{ij} = \beta_j$. Смысл этой теоремы в следующем: хотя при любых заданных ценах каждый покупатель стремится максимизировать лишь свою функцию полезности, ориентируясь только на свое бюджетное ограничение, в положении рыночного равновесия покупки всех покупателей максимизируют *общий критерий* $F(y)$. Идея этой работы существенно использована в теореме о существовании равновесных цен в нашей модели.

Будем считать, что предложенная модель обмена удовлетворяет следующим условиям.

Условие 1. *В каждом столбце и каждой строке матриц* $A = \{\alpha_{ij}\}$, $B = \{\beta_{ij}\}$ *есть хотя бы один ненулевой элемент.*

Условие 2. *Для любых двух индексов* i_1, i_2 $(1 \leqslant i_1, i_2 \leqslant m)$ *найдутся последовательности индексов* $i_1', \ldots, i_p'$ $(1 \leqslant i_r' \leqslant m)$, $j_1, \ldots, j_{p+1}$ $(1 \leqslant$ $\leqslant j_s \leqslant n)$, *такие, что будут выполнены неравенства*

$$\beta_{i_1 j_1} > 0, \quad \alpha_{i_1' j_1} > 0; \ldots; \beta_{i_p' j_{p+1}} > 0, \quad \alpha_{i_2 j_{p+1}} > 0. \tag{4}$$

Легко убедиться в том, что условие 2 эквивалентно неразложимости матрицы $C = BA^*$, имеющей порядок $m \times m$. Это условие допускает наглядную интерпретацию: для любых двух предпринимателей A_{i_1}, A_{i_2} найдется последовательность «соединяющих» их предпринимателей A_{i_1}, $A_{i_1'}, \ldots, A_{i_p'}, A_{i_2}$, такая, что если взять в этой цепи двух подряд идущих предпринимателей, то окажется, что первый из них обладает некоторым продуктом, который полезен второму. Поэтому условие 2 имеет смысл называть условием связности множества предпринимателей.

Введем обозначение $r(C)$ — максимальное число попарно непересекающихся замкнутых собственных подмножеств $\{i \mid 1 \leqslant i \leqslant m\}$ (подмножество I называется замкнутым, если $C_{i_1 i_2} = 0$ при $i_1 \in I$, $i_2 \notin I$). Аналогичный смысл имеет $r(D)$, где $D = B^*A$ — матрица порядка $n \times n$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма. *Пусть имеет место условие* 1. *Тогда* $r(C) = r(D)$.

Прежде чем доказывать лемму, отметим, что при выполнении условия 2 $r(C) = 0$. Поэтому, согласно лемме, в таком случае $r(D) = 0$, т. е. матрица D неразложима. Поскольку свойство неразложимости матрицы D естественно назвать свойством связности множества продуктов, то, таким образом, связность множества предпринимателей эквивалентна связности множества продуктов. Этот факт представляет интерес по следующей причине: в условия доказываемой ниже основной теоремы включены условия 1 и 2, но можно было бы доказать утверждение этой теоремы, заменив условие 2 условием неразложимости матрицы D. Из изложенного выше ясно, что нового результата при этом не получилось бы.

Доказательство леммы. Очевидно, что достаточно доказать лемму в предположении, что хотя бы одно из чисел $r(C)$, $r(D)$ отлично от нуля. Пусть, например, $r(C) \geqslant 1$. Согласно определению $r(C)$ найдутся подмножества I_s, $1 \leqslant s \leqslant r(C)$, множества $\{i | 1 \leqslant i \leqslant m\}$, такие, что $I_{s_1} \cap I_{s_2} = \Lambda$ при $s_1 \neq s_2$, $C_{i_1 i_2} = 0$ при $i_1 \in I_s$, $i_2 \in \bar{I}_s$. Обозначим $J_s = \{j | \beta_{ij} > 0$ при некотором $i \in I_s\}$. Согласно условию 1 множества $J_s \neq \Lambda$.

Докажем, что $J_{s_1} \cap J_{s_2} = \Lambda$ при $s_1 \neq s_2$. Пусть это не так. Тогда найдутся индексы $i_1 \in I_{s_1}$, $i_2 \in I_{s_2}$, j_0, такие, что $\beta_{i_1 j_0} > 0$, $\beta_{i_2 j_0} > 0$. Согласно условию 1 по индексу j_0 найдется индекс i_0, такой, что $\alpha_{i_0 j_0} > 0$. Но из равенств $\beta_{i_1 j_0} > 0$, $\alpha_{i_0 j_0} > 0$ и замкнутости множества I_{s_1} следует, что $i_0 \in I_{s_1}$ и точно так же $i_0 \in I_{s_2}$, что противоречит условию $I_{s_1} \cap I_{s_2} = \Lambda$.

Докажем, что подмножества J_s замкнуты. В противном случае для некоторого индекса s_0 найдутся индексы j_1, j_2, i_0, такие, что $j_1 \in J_{s_0}$, $j_2 \in \bar{J}_{s_0}$ и $\alpha_{j_1 i_0} \cdot \beta_{j_2 i_0} > 0$. Поскольку $j_1 \in J_{s_0}$, то $\beta_{i_1 j_1} > 0$ для некоторого индекса $i_1 \in I_{s_0}$. Из неравенств $\beta_{i_1 j_1} > 0$, $\alpha_{j_1 i_0} > 0$ и замкнутости множества I_{s_0} следует, что $i_0 \in I_{s_0}$. Но $\beta_{j_2 i_0} > 0$, следовательно, $j_2 \in J_{s_0}$ — противоречие.

Итак, множества J_s, $1 \leqslant s \leqslant r(C)$ представляют собой один из наборов попарно пересекающихся замкнутых подмножеств множества $\{j | 1 \leqslant \leqslant j \leqslant n\}$. Согласно определению числа $r(D) r(D) \geqslant r(C) \geqslant 1$.

Поскольку $r(D) \geqslant 1$, то, проведя совершенно аналогичные рассуждения, получим также $r(C) \geqslant r(D) \geqslant 1$. Отсюда $r(C) = r(D)$. Лемма доказана.

Теорема. *Пусть выполнены условия 1 и 2. Существуют строго положительные равновесные цены $\bar{p}$; соответствующие им ассортиментные наборы $\bar{y}_i$, фигурирующие в определении равновесия, максимизируют функционал*

$$F_{\bar{p}}(y) = \sum_{i=1}^{m} c_i(\bar{p}) \ln f_i(y_i) \tag{5}$$

при ограничениях $y_{ij} \geqslant 0$

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ij} = \beta_j = \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij}. \tag{6}$$

Здесь $c_i(\bar{p}) = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \bar{p}_j$. При этом числа $\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_n$ являются одновременно лагранжевыми множителями, соответствующими ограничениям (6), т. е.

$$\bar{p}_j \geqslant \left.\frac{\partial F_{\bar{p}}}{\partial y_{ij}}\right|_{y=y}, \quad \bar{p}_j = \left.\frac{\partial F_{\bar{p}}}{\partial y_{ij}}\right|_{y=y}, \quad \text{если } \bar{y}_{ij} > 0. \tag{7}$$

Примечание. Таким образом в положении равновесия максимизируется общий критерий $F_{\bar{p}}(y)$, причем «вес», с которым в этот критерий входит логарифм функции полезности предпринимателя A_i, есть стоимость его продуктов в равновесных ценах. Равновесные цены — такие цены p, при которых в задаче максимизации критерия (5) эти цены оказываются лагранжевыми множителями для ограничений (10).

Доказательство теоремы. Рассмотрим $(n-1)$-мерный симплекс S в n-мерном пространстве, определяемый условиями

$$\sum_{j=1}^{n} p_j\beta_j = 1, \quad p_j \geqslant 0. \tag{8}$$

Для любого фиксированного вектора $p \in S$ определим множество $I(p) = \{i|,\ c_i(p) = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}p_j > 0\}$. Это множество непусто, так как в каждом столбце матрицы B есть хотя бы один ненулевой элемент. Определим функцию $F_p(y)$ равенством

$$F_p(y) = \sum_{i\in I(p)} c_i(p)\ln f_i(y_i), \tag{9}$$

где $y = \{y_{ij}|i \in I(p),\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$. Пусть $Y(p)$ — множество точек максимума функции $F_p(y)$ в области:

$$y_{ij} \geqslant 0, \quad i \in I(p), \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \quad \sum_{i\in I(p)} y_{ij} = \beta_j. \tag{10}$$

Это множество непусто, так как в каждой строке матрицы A есть хотя бы один ненулевой элемент. При этом в любой точке множества $Y(p)$ $f_i(y_i) > 0$. Пусть $y(p)$ — любая точка множества $Y(p)$. Поскольку $F_p(y)$ — выпуклая вверх функция y и область, задаваемая ограничениями (10), выпукла, то согласно теореме Куна — Таккера существует n-мерный вектор $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$, такой, что

$$F_p(y) + \sum_{j=1}^{n} \pi_j\Big(\beta_j - \sum_{i\in I(p)}' y_{ij}\Big) \leqslant F_p(y(p)) = \max F_p(y) \tag{11}$$

для любого вектора y с неотрицательными компонентами. Верно и обратное: существование вектора π достаточно для того, чтобы $y(p)$ был точкой максимума функции $F_p(y)$ в области (10). Из равенства (11) и формулы (9) непосредственно следует, что

$$\pi_j \geqslant \frac{\partial F_p(y)}{\partial y_{ij}}\Bigg|_{y=y(p)} \geqslant 0, \quad \pi_j = \frac{\partial F_p(y)}{\partial y_{ij}}\Bigg|_{y=y(p)}, \quad \text{если } y_{ij}(p) > 0. \tag{12}$$

Поэтому

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j y_{ij}(p) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_p(y(p))}{\partial y_{ij}(p)} y_{ij}(p) = \sum_{j=1}^{n} y_{ij}(p)\frac{c_i(p)\alpha_{ij}}{f_i(y_i(p))} = c_i(p). \tag{13}$$

Но

$$\sum_{i\in I(p)} \sum_{j=1}^{n} \pi_j y_{ij}(p) = \sum_{j=1}^{n} \pi_j \sum_{i\in I(p)} y_{ij}(p) = \sum_{j=1}^{n} \pi_j\beta_j;$$

с другой стороны

$$\sum_{i\in I(p)} c_i(p) = \sum_{i=1}^{m} c_i(p) = \sum_{j=1}^{n} p_j \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij} = \sum_{j=1}^{n} p_j\beta_j = 1;$$

следовательно

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j\beta_j = 1, \quad \pi_j \geqslant 0$$

Таким образом, вектор $\pi \in S$. Пусть $Q(p)$ — множество векторов π, удовлетворяющих неравенству (11) для некоторого, а значит и для всех $y(p)$.

Из изложенного выше следует, что $Q(p)$ — подмножество симплекса S. Очевидно также, что $Q(p)$ — выпуклое, замкнутое множество.

Покажем, что это отображение полунепрерывно сверху. Действительно, пусть $p^\nu \to p^0$, $\pi^\nu \to \pi^0$, $p^\nu \in S$, $\pi^\nu \in Q(p^\nu)$. Отметим прежде всего, что $I(p^0) \in I(p^\nu)$ при всех достаточно больших ν. Неравенство (11) при $p = p^\nu$ принимает вид

$$\sum_{i\in I(p^\nu)} c_i(p^\nu)\ln f_i(y_i) + \sum_{j=1}^{n}\pi_j^\nu\Big(\beta_j - \sum_{i\in I(p^\nu)} y_{ij}\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i\in I(p^\nu)} c_i(p^\nu)\ln f_i(y_i(p^\nu)) \tag{14}$$

при всех $y_{ij} \geqslant 0$, $i \in I(p^\nu)$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

В этом неравенстве $c_i(p^\nu) \to 0$ при $i \notin I(p^0)$. Положим при $i \notin I(p^0)$ $y_{ij} = y_{ij}^\nu \geqslant 0$, где числа y_{ij}^ν таковы, что $y_{ij}^\nu \to 0$ и $c_i(p^\nu)\ln f_i(y_i^\nu) \to 0$ при $\nu \to +\infty$. Выбрав при $i \in I(p^0)$ y_{ij} такими, чтобы $f_i(y_i) > 0$, будем иметь

$$\lim_{\nu\to+\infty}\Big[\sum_{i\in I(p^\nu)} c_i(p^\nu)\ln f_i(y_i) + \sum_{j=1}^{n}\pi_j^\nu\Big(\beta_j - \sum_{i\in I(p^\nu)} y_{ij}\Big)\Big] =$$

$$= \sum_{i\in I(p^0)} c_i(p^0)\ln f_i(y_i) + \sum_{j=1}^{n}\pi_j^0\Big(\beta_j - \sum_{i\in I(p^0)} y_{ij}\Big) > -\infty. \tag{15}$$

Тогда, используя неравенство (14), получим

$$\varliminf_{\nu\to+\infty} \sum_{i\in I(p^0)} c_i(p^\nu)\ln f_i(y_i(p^\nu)) \geqslant \varliminf_{\nu\to+\infty} \sum_{i\in I(p^\nu)} c_i(p^\nu)\ln f_i(y_i(p^\nu)) > -\infty, \tag{16}$$

так как

$$\varlimsup_{\nu\to+\infty} c_i(p^\nu)\ln f_i(y_i(p^\nu)) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad i \notin I(p^0).$$

Поскольку при $i \in I(p^0)\, c_i(p^\nu) \to c_i(p^0) > 0$, то согласно (16) при этих i $f_i(y_i(p^\nu)) \geqslant \delta > 0$ для некоторого фиксированного δ и всех достаточно больших ν. В силу неравенств

$$y_{ij}(p^\nu) \geqslant 0, \quad i \in I(p^0), \quad \sum_{i\in I(p^0)} y_{ij}(p^\nu) \leqslant \beta_j - \sum_{i\in I(p^\nu)\setminus I(p^0)} y_{ij}(p^\nu) \leqslant \beta_j$$

можно выбрать последовательность $\nu_s \to +\infty$, такую, что

$$\lim_{\nu_s\to+\infty} y_{ij}(p^{\nu_s}) = \bar{y}_{ij} \geqslant 0, \quad \sum_{i\in I(p^0)} \bar{y}_{ij} \leqslant \beta_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

$$f_i(\bar{y}_i) \geqslant \delta, \quad i \in I(p^0),$$

$$\lim_{\nu\to+\infty}\sum_{i\in I(p^0)} c_i(p^\nu)\ln f_i(y_i(p^\nu))=\lim_{\nu_s\to+\infty}\sum_{i\in I(p^0)} c_i(p^{\nu_s})\ln f_i(y_i(p^{\nu_s}))=$$

$$=\sum_{i\in I(p^0)} c_i(p^0)\ln f_i(\bar y_i).$$

Положим

$$y_{ij}{}^0=\begin{cases}\bar y_{ij} \text{ при всех } i\in I(p^0) \text{ за исключением какого-нибудь одного индекса } i_0\\ \bar y_{i_0j}+\beta_j-\sum\limits_{i\in I(p^0)\setminus i_0} y_{ij} \text{ при } i=i_0.\end{cases}$$

Очевидно, что $y_{ij}{}^0\geqslant\bar y_{ij}\geqslant 0$ и $\sum\limits_{i\in I(p^0)} y_{ij}=\beta_j$. Из неравенств (14) и (16) получим, что ($f_i(y_i)$ — неубывающие функции)

$$\sum_{i\in I(p^0)} c_i(p^0)\ln f_i(y_i)+\sum_{j=1}^n\pi_j{}^0\Big(\beta_j-\sum_{i\in I(p^0)} y_{ij}\Big)\leqslant\sum_{i\in I(p^0)} c_i(p^0)\ln f_i(y_i{}^0).$$

Отсюда следует, что $y_i{}^0$ максимизируют $F_{p^0}(y)$ при ограничениях $y_{ij}\geqslant 0$ $\sum\limits_{i\in I(p^0)} y_{ij}=\beta$ и $\pi^0=(\pi_1{}^0,\ldots,\pi_n{}^0)$ есть соответствующий вектор лагранжевых множителей. Итак, $\pi^0\in Q(p^0)$, что и требовалось доказать.

Таким образом, построенное нами точечно-множественное отображение симплекса S в себя удовлетворяет всем условиям теоремы Какутани о неподвижной точке *. Поэтому существует вектор $\bar p\geqslant 0$, $\sum\limits_{j=1}^n\bar p_j\beta_j=1$, такой, что $\bar p\in Q(\bar p)$. Более подробно существует множество $I(\bar p)$ и вектор $\bar y=\{\bar y_{ij}\,|\,i\in I(\bar p),\ 1\leqslant j\leqslant n\}$, такие, что

$$\sum_{j=1}^n\beta_{ij}\bar p_j=c_i(\bar p)=0\quad\text{при}\quad i\notin I(\bar p);\qquad\sum_{i\in I(\bar p)}\bar y_{ij}=\beta_j,\tag{17}$$

$$\bar p_j\geqslant\frac{\partial F_{\bar p}}{\partial y_{ij}}\bigg|_{y=\bar y}=\frac{c_i(\bar p)\,\alpha_{ij}}{f_i(\bar y_i)},\tag{18}$$

$$\bar p_j=\frac{c_i(\bar p)\,\alpha_{ij}}{f_i(\bar y_i)},\quad\text{если}\quad\bar y_{ij}>0;\quad i\in I(\bar p).$$

Предположим, что множество $I_1=\{i\,|\,1\leqslant i\leqslant m\}\setminus I(\bar p)$ непусто. Согласно условию связности множества покупателей (условие 2), для любого разбиения множества $\{i\,|\,1\leqslant i\leqslant m\}$ на два непересекающихся подмножества (в нашем случае это множества I_1, $I(\bar p)$) найдется пара индек-

* Здесь можно было бы сослаться на теорему Брауэра о неподвижной точке, так как, используя результаты [2], легко показать фактическую однозначность построенного отображения и тем самым, в силу установленного выше свойства «непрерывности» отображения, его обычную непрерывность. В приведенную схему полностью укладывается доказательство теоремы существования в формулируемом ниже более общем нелинейном случае, где мы не располагаем соответствующим свойством однозначности.

сов, принадлежащих этим множествам ($i_1 \in I_1$, $i_2 \in I(\bar{p})$), таких, что для некоторого индекса j^* $\beta_{i_1 j^*} > 0$, $\alpha_{i_2 j^*} > 0$. Поскольку $c_{i_1}(\bar{p}) = \sum_{j=1}^{n} \beta_{i_1 j} \bar{p}_j = 0$, то $\bar{p}_{j^*} = 0$, и тогда согласно неравенству (18) $c_{i_2}(\bar{p}) = 0$, что противоречит определению множества $I(\bar{p})$. Итак, $I(\bar{p}) = \{i \mid 1 \leqslant i \leqslant m\}$.

Отсюда, в частности, следует, что поскольку в каждом столбце матрицы есть хотя бы один ненулевой элемент, то согласно (18) $\bar{p}_j > 0$ при всех индексах j. Далее, аналогично (13), показывается, что

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{p}_j \bar{y}_{ij} = c_i(\bar{p}) = \sum_{j=1}^{n} \bar{p}_j \beta_{ij}, \quad 1 \leqslant i \leqslant m. \tag{19}$$

Но если записать (18) в виде

$$\frac{\alpha_{ij_0}}{\bar{p}_{j_0}} = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \frac{\alpha_{ij}}{\bar{p}_j} \quad \text{при} \quad \bar{y}_{ij_0} > 0, \tag{20}$$

то видно, что ассортиментный набор $\bar{y}_i$ максимизирует $f_i(y_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} y_{ij}$ на множестве наборов y_i, удовлетворяющих бюджетному ограничению предпринимателя A_i в ценах $\bar{p}$.

Теорема полностью доказана.

Отметим, что аналогичное утверждение справедливо в более общем случае, когда $f_i(y_i) \not\equiv 0$ — непрерывные, убывающие, выпуклые вверх и однородные первой степени функции аргументов y_i. Только та часть условий, которая была связана с матрицей A, формулируется теперь так: определим числа $\alpha_{ij}(y_i)$ формулой

$$\alpha_{ij}(y_i) = \overline{\lim_{h \to +0}} \frac{f_i(y_{i1}, \ldots, y_{ij} + h, \ldots, y_{in}) - f_i(y_{i1}, \ldots, y_{ij} \ \ldots, y_{in})}{h};$$

1) если I — некоторое собственное подмножество множества $I_0 = \{i \mid 1 \leqslant i \leqslant m\}$ и заданы числа $y_{ij} \geqslant 0$ ($i \in I$, $1 \leqslant j \leqslant n$), удовлетворяющие условиям $\sum_{i \in I} y_{ij} = \beta_j$, $f_i(y_i) > 0$ ($i \in I$), то найдутся индексы $i_1 \in I_0 \setminus I$, $i_2 \in I$, $1 \leqslant j \leqslant n$, для которых $\beta_{i_1 j} > 0$, $\alpha_{i_2 j}(y_{j_2}) > 0$; 2) если $y_{ij} \geqslant 0$ ($1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$) удовлетворяют условиям $\sum_{i=1}^{m} y_{ij} = \beta_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, то в каждом столбце матрицы $A(y) = \{\alpha_{ij}(y_i)\}_{1 \leqslant j \leqslant n;\, 1 \leqslant i \leqslant m}$ есть хотя бы один ненулевой элемент.

Это утверждение доказывается так же, как и приведенная выше теорема. Отличие состоит в способе доказательства соотношения (13), поскольку уже нельзя пользоваться неравенствами (12). Именно неравенство (11) можно записать в виде:

$$\sum_{i \in I(p)} c_i(p) \ln f_i(y_i) - \sum_{i \in I(p)} \sum_j \pi_j y_{ij} \leqslant \sum_{i \in I(p)} c_i(p) \ln f_i(y_i(p)) - \\ - \sum_{i \in I(p)} \sum_j \pi_j y_{ij}(p);$$

при всех $y_{ij} \geqslant 0$. Отсюда

$$c_i(p) \ln f_i(y_i) - \sum_j \pi_j y_{ij} \leqslant c_i(p) \ln f_i(y_i(p)) - \sum_j \pi_j y_{ij}(p), \qquad y_{ij} \geqslant 0 \tag{21}$$

при всех $i \in I(p)$. Положим в этом неравенстве $y_{ij} = (1+\lambda) y_{ij}(p)$, где $\lambda > -1$. Используя однородность функции $f_i(y_i)$, получим

$$\ln(1+\lambda) c_i(p) - \lambda \sum_j \pi_j y_{ij}(p) \leqslant 0.$$

Поскольку это неравенство справедливо для всех $\lambda > -1$, то отсюда легко следует требуемое соотношение

$$c_i(p) = \sum_j \pi_j y_{ij}(p) \tag{22}$$

Укажем также, что после того как доказано в этом случае существование вектора цен $\bar{p} \in Q(\bar{p})$, утверждение, что набор $\bar{y}_i$ максимизирует $f_i(y_i)$ при бюджетном ограничении, легко выводится из неравенств (21), (22) при $p = \pi = \bar{p}$.

Нам кажется, что было бы интересно попытаться дать математическую модель, сколько-нибудь реально описывающую динамику выработки равновесных обменных цен, в предположении, что предприниматели, многократно встречаясь друг с другом (случайным образом или используя какую-либо информацию о своих партнерах), вступают в парные соглашения о ценах, по которым они согласны обмениваться продуктами. Такая модель была бы по существу моделью коллективного поведения. Отметим по этому поводу, что в настоящее время на языке теории автоматов уже ставятся и исследуются некоторые простейшие модели коллективного поведения (см., например, [4—9]).

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Gale. The law supply and demand. Math. Scand., 1955, v. III, № 1.
2. Д. Гейл. Теория линейных экономических моделей. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
3. E. Eisenberg, D. Gale. Consensus of subjective probabilities: the Pari-mutuel method. Ann. Math. Statist, 1959, v. XXX, № 1.
4. М. Л. Цетлин. Конечные автоматы и моделирование простейших форм поведения. Успехи математических наук, 1963, т. XXVIII, № 4.
5. И. М. Гельфанд, И. И. Пятецкий-Шапиро, М. Л. Цетлин. О некоторых классах игр и игр автоматов. ДАН СССР, 1963, т. 152, № 4.
6. В. И. Брызгалов, И. М. Гельфанд, И. И. Пятецкий-Шапиро, М. Л. Цетлин. Однородные игры автоматов и их моделирование на ЦВМ. Автоматика и телемеханика, 1964, т. XXV, № 11.
7. В. А. Волконский. Асимптотические свойства поведения простейших автоматов в игре. Проблемы передачи информации, 1965, т. I, № 2.
8. В. А. Боровиков, В. И. Брызгалов. Простейшая симметрическая игра многих автоматов. Автоматика и телемеханика, 1965, т. XXVI, № 4.
9. Б. Г. Питтель. Об асимптотических свойствах одного варианта игры Гура. Проблемы передачи информации, 1965, т. I, № 3.

Поступила в редакцию
27 IV 1966

ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ — 1967, том III, вып. 3

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО РАСПИСАНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ПЕРЕНАЛАДОК

Б. А. ВЛАСЮК

(Москва)

В работах [1—3] при рассмотрении задачи об оптимальном расписании ищется такая последовательность обработки деталей, при которой заданная целевая функция принимает минимально возможное значение. В частности, в работах [1, 2] исследуется задача об оптимальном расписании обработки произвольного числа деталей на одной машине. При рассмотрении этой задачи считается, что заданы длительности обработки каждой детали; отсутствует переналадка машины при переходе с одной детали на другую; с каждой деталью связана функция потерь, зависящая от момента окончания ее обработки; минимизируемая целевая функция равна сумме этих функций потерь по всем деталям. Такая постановка задачи целесообразна, если длительностью и стоимостью переналадок можно пренебречь или если длительность и стоимость переналадок постоянны для всех переходов. На практике, однако, часто возникают случаи, когда переналадки существенны и различны для различных переходов. В настоящей работе рассматривается одна из задач такого рода.

Постановка задачи. Пусть X — множество деталей; $\tau(x)$ — длительность обработки детали $x \in X$; $\alpha(x, t)$ — потери, возникающие в случае, если деталь $x \in X$ будет обработана в момент t, $\beta(x, x')$ — стоимость переналадки с детали x на деталь x' $(x, x' \in X)$.

Будем решать задачу при следующих условиях: 1) в каждый момент времени может обрабатываться только одна деталь (условие неодновременности операций); 2) если обработка какой-либо детали начата, то пока она не будет закончена, машина не может перейти к обработке другой детали (условие неразрывности операций);

3) длительность переналадки с одной детали на другую равна нулю.

Требуется найти такую последовательность обработки деталей, чтобы сумма потерь по всем деталям плюс сумма стоимостей всех переналадок приняла минимально возможное значение.

Для получения выражения целевой функции введем следующие обозначения: $\{x_i\}_A = \{x_1, x_2, \ldots, x_{|A|}\}$ — некоторая последовательность элементов множества $A \subset X$; Π_A — множество всех возможных таких последовательностей; $|A|$ — число элементов множества A.

При заданной последовательности $\{x_i\}_X$ целевая функция будет иметь вид:

$$L = \sum_{i=1}^{|X|} \alpha(x_i, t(x_i)) + \sum_{i=1}^{|X|} \beta(x_{i-1}, x_i), \tag{1}$$

где

$$t(x_i) = \sum_{k=1} \tau(x_k). \tag{2}$$