

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР НА ВЫЖИВАНИЕ

Л. А. ПЕТРОСЯН

(Ленинград)

Под дифференциальной игрой понимают многошаговый процесс с непрерывным временем, при котором каждый из участников игры непрерывно контролирует в соответствии со своими интересами изменение позиционной переменной. В настоящее время, несмотря на значительное число работ, посвященных дифференциальным играм, нет единого определения дифференциальной игры. Наибольшая трудность при этом заключается в математическом описании возможности использования смешанных стратегий в каждый момент времени.

В настоящей работе делается попытка дать определение дифференциальной игры, как некоторого класса эквивалентности в метрике Хелли. Идея такого подхода принадлежит Н. Н. Воробьеву. Хотя в работе рассмотрены дифференциальные игры на выживание, все результаты могут быть легко переформулированы для дифференциальных игр с интегральным выигрышем.

Дискретные игры на выживание. Рассматриваемые дискретные игры на выживание представляют собой обобщения игр на выживание, исследованных Хаузнером [1], Беллманом [2], Милнором и Шепли [3], Романовским [4], и более всего напоминают игры, описанные Скарфом в [5].

Пусть S — некоторая ограниченная, замкнутая n -мерная область в n -мерном евклидовом пространстве R^n с границей B , $g(x, y, z)$ — некоторая непрерывная n -мерная вектор-функция, которая при любом $x \in R^n$ задана на единичном квадрате $y \times z$, x_0 — фиксированный вектор, принадлежащий S .

Игра происходит следующим образом. На первом шаге игрок I выбирает некоторое значение $y \in [0, 1]$ и одновременно игрок II — некоторое значение $z \in [0, 1]$. Затем проводится прямая из точки x_0 в точку $x_1 = x_0 + \delta g(x_0, y, z)$, где δ некоторое двоично-рациональное число. На втором шаге игроки заново выбирают числа y, z и точка x_1 соединяется отрезком с точкой $x_2 = x_1 + \delta g(x_1, y, z)$. Этот процесс продолжается до тех пор, пока ломаная $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ не пересечет в некоторой точке границу B , в которой игра прекращается. На границе B задана некоторая непрерывная вещественная функция $b(x)$; если игра прекращается в точке $x \in B$, то игрок I выигрывает $b(x)$, а второй получает $b(x)$. Для полноты определения игры мы должны определить выигрыш и в том случае, когда игра продолжается неограниченно. Однако для дальнейшего изложения это не имеет существенного значения.

Поскольку описанная игра зависит от параметров x_0 и δ , будем ее обозначать $G(x_0, \delta)$. При $\delta \rightarrow 0$ поведение игры стремится быть описанным дифференциальным уравнением $\dot{x} = g(x, y, z)$, которое является структурным уравнением дифференциальной игры.

Условия, при которых значения игр $G(x, \delta)$ существуют, не достаточно хорошо известны, однако для дальнейшего это не имеет существенного значения. Пусть $V^+(x, \delta)$ — наилучшее, что может гарантировать игрок I, используя смешанные стратегии в игре $G(x, \delta)$, т. е. $\sup \inf$ математического ожидания выигрыша в классе смешанных стратегий. Пусть $V^-(x, \delta) = \inf \sup$ выигрыша. Известно, что всегда $V^-(x, \delta) \geq V^+(x, \delta)$.

Дифференциальные игры на выживание. Рассмотрим следующую вспомогательную игру. Пусть Y_δ и Z_δ множества чистых стратегий игроков I и II в игре $G(x, \delta)$, т. е. Y_δ и Z_δ представляют собой множества всевозможных кусочно-постоянных по t на отрезках $k\delta < t \leq (k+1)\delta$, $k = 0, 1, \dots$ функций $y(x, t)$, $z(x, t)$ со значениями из отрезка $[0, 1]$. Пусть $\bar{Y} = \bigcup_{\delta} Y_\delta$ и $\bar{Z} = \bigcup_{\delta} Z_\delta$. Множества функций $\bar{Y}$ и $\bar{Z}$ являются множествами стратегий игроков I и II во вспомогательной игре. В любой ситуации (y, z) функция выигрыша определяется следующим образом. Пусть $y \in Y_{\delta_1} \subset \bar{Y}$, $z \in Z_{\delta_2} \subset \bar{Z}$ и $x(t)$ — решение структурного уравнения

$$\dot{x}_{i+1} = x_i + \delta g(x_i, y_i, z_i)$$

при начальном условии $x(0) = x_0$, где $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, и пусть $x(t_p)$ — точка, в которой траектория $x(t)$ впервые пересекает границу B , тогда полагаем

$$K(y(x, t), z(x, t)) = b(x(t_p)).$$

Полученную таким образом игру будем называть вспомогательной и обозначать $\bar{G}(x, 0)$.

Обозначим через $\bar{Y} \times \bar{Z}$ максимальный класс множеств пар функций $y(x, t)$ и $z(x, t)$, обладающих следующими свойствами:

- 1) если $Y \times Z \in \bar{Y} \times \bar{Z}$, то $\bar{Y} \subset Y$ и $\bar{Z} \subset Z$;
- 2) если $Y \times Z \in \bar{Y} \times \bar{Z}$, то при любых $y \in Y$ и $z \in Z$ уравнение $\dot{x} = g(x, y(x, t), z(x, t))$ имеет единственное решение при любых начальных условиях $x_0 \in S$.

Для любой пары функций $(y, z) \in (Y \times Z) \in \bar{Y} \times \bar{Z}$ определим функционал $K(y, z)$ так же, как это делалось во вспомогательной игре $\bar{G}(x, 0)$.

Пусть Ψ — класс всех множеств $Y \times Z \in \bar{Y} \times \bar{Z}$, для которых множество стратегий $\bar{Y}$ является плотным в Y метрике Хелли

$$\sup_{z \in Z} |K(y_1, z) - K(y_2, z)| = \rho(y_1, y_2)$$

и множество $\bar{Z}$ является плотным в Z в метрике

$$\sup_{y \in Y} |K(y, z_1) - K(y, z_2)| = \rho(z_1, z_2).$$

Определение 1. Дифференциальной игрой на выживание называется игра над множеством стратегий $Y \times Z \in \Psi$ с функцией выигрыша $K(y, z)$.

Поскольку задание $x_0, S, B, b(x), g$ и множеств $Y \times Z \in \Psi$ однозначно определяют игру на выживание, условимся обозначать ее:

$$G(x_0) = (x_0, S, B, b(x), g(x, y, z), Y, Z),$$

где $Y \times Z \in \Psi$.

Будем называть дифференциальные игры на выживание эквивалентными, если они отличаются только множествами стратегий $Y \times Z \in \Psi$.

Таким образом, определенное отношение эквивалентности, очевидно, является обычным отношением эквивалентности и разбивает все дифференциальные игры на выживание на классы эквивалентных между собой игр.

Определение 2. Предел

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} V^-(x, \delta) = V^-(x, 0)$$

называется нижним значением дифференциальной игры на выживание.

Определение 3. Предел

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} V^+(x, \delta) = V^+(x, 0)$$

называется верхним значением дифференциальной игры на выживание.

Определение 4. Если предельные функции $V^+(x, 0)$ и $V^-(x, 0)$ существуют и равны между собой, то функция

$$V(x, 0) = V^-(x, 0) = V^+(x, 0)$$

называется обобщенным значением дифференциальной игры на выживание.

Следующие две леммы показывают, что определение 4 непротиворечиво.

Лемма 1. Если игра

$$G(x) = (x, S, B, b(x), g(x, y, z), \bar{Y}, \bar{Z})$$

имеет обобщенное значение, то имеют обобщенные значения все игры $G' \sim G$ и их обобщенные значения равны между собой.

Доказательство леммы может быть получено использованием теорем Вальда (см. [6]).

Лемма 2. Пусть игра $\bar{G}(x, 0)$ имеет значение в чистых стратегиях $\text{Val } \bar{G}(x, 0)$ и пусть

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} V^-(x, \delta) = V(x, 0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} V^+(x, \delta),$$

тогда $\text{Val } \bar{G}(x, 0) = V(x, 0)$

(из леммы 2 следует, что во всех тех случаях, когда значение игры $G(x)$ существует, обобщенное значение совпадает со значением).

Теорема 1. Пусть

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} V^+(x, \delta) = V^+(x, 0) = V(x, 0) = V^-(x, 0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} V^-(x, \delta)$$

и функция $V^+(x, \delta)$ дифференцируема по x и дифференцируема по δ в нуле, тогда функция $V(x, 0)$ удовлетворяет дифференциально-экстремальному уравнению

$$\text{Val}_{y, z} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \cdot g(x, y, z) \right) = 0 \quad (1)$$

при граничном условии

$$V(x)|_B = b(x)$$

(здесь $V(x)$ — обобщенное значение дифференциальной игры).

Доказательство. Функция $V^+(x, \delta)$ при любом $\delta > 0$ является решением функционального уравнения

$$\text{Sup Inf} [V^+(x + \delta g(x, y, z), \delta) - V^+(x, \delta)] = 0$$

или

$$\text{Sup Inf} \left[\frac{V^+(x + \delta g(x, y, z), \delta) - V^+(x, \delta)}{\delta} \right] = 0. \quad (2)$$

Перейдем в равенстве (2) к пределу при $\delta \rightarrow 0$. Поскольку равномерно по $y, z \in [0, 1] \times [0, 1]$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{V^+(x + \delta g(x, y, z), \delta) - V^+(x, \delta)}{\delta} = \left(\frac{\partial V}{\partial x} \cdot g(x, y, z) \right),$$

можно перейти к пределу под знаком оператора Sup Inf и из непрерывности функции $g(x, y, z)$ имеем:

$$\text{Sup Inf} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \cdot g(x, y, z) \right) = \text{Val} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \cdot g(x, y, z) \right) = 0,$$

что и требовалось.

При доказательстве теоремы мы нигде не использовали то, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} V^-(x, \delta) = V^-(x, 0) = V(x, 0).$$

Проведя аналогичные рассуждения для функций $V^-(x, \delta)$, можно показать, что и верхнее значение $V^-(x, \delta)$ является решением дифференциально-экстремального уравнения (1).

В работе [5] Скарфом получено одно достаточное условие для существования обобщенного значения дифференциальной игры на выживание. При этом рассмотрение ограничивалось так называемыми «несмещенными» (unbiased) играми. Однако условие несмещенности является в действительности очень сильным и не выполняется в подавляющем большинстве случаев (например, когда существует ситуация равновесия в чистых стратегиях). Достаточное условие, которое получим, хотя и является вполне аналогичным условию, полученному Скарфом, применимо для значительно более широкого класса игр.

Определение 5. Обозначим через D_{yz} линейный дифференциальный оператор первого порядка

$$\sum_k g^k(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Оператор D_{yz}^2 определяется как

$$\sum_{k, l} g^k(x, y, z) g^l(x, y, z) \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l}.$$

Определение 6. Пусть $L(f)$ — оператор

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\text{Val} \left\| \left(D_{yz} + \frac{\delta}{2} D_{yz}^2 \right) f \right\| - \text{Val} \| D_{yz} f \|}{\delta}.$$

Легко видеть, что $L(f)$ представляет собой маргинальное значение (см. [7]) игры $D_{yz}f$ по игре $\frac{1}{2}D_{yz}^2f$. Заметим также, что в случае несмещенных игр для любой функции f , $\text{Val} \| D_{yz}f \| = 0$ и мы получаем оператор L , рассмотренный Скарфом.

Определение 7. Функция $f(x)$ принадлежит классу M^+ , если:

1) она имеет ограниченные и непрерывные производные вплоть до третьего порядка в некоторой ограниченной области, содержащей внутри себя замыкание множества S ;

2) $L(f) \geq c > 0$ в S ;

3) $\text{Val} (D_{yz}f) = 0$ в S ;

4) $f(x) \leq b(x)$ при $x \in B$.

Определение 8. Функция $f(x)$ принадлежит классу M^- , если:

1) она имеет ограниченные непрерывные производные вплоть до третьего порядка в некоторой открытой области, содержащей внутри себя замыкание S ;

- 2) $L(f) \leq c < 0$ в S ;
 3) $\text{Val}(D_{yz}f) = 0$ в S ;
 4) $f(x) \geq b(x)$ при $x \in B$.

Теорема 2. Пусть $f(x) \in M^+$, $\varphi(x) \in M^-$, тогда

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} V^+(x, \delta) \geq f(x), \quad \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0^+} V^-(x, \delta) \leq \varphi(x)$$

во всех внутренних точках множества S .

Доказательство теоремы похоже на доказательство аналогичной теоремы в [5] и его приводить не будем.

Из теоремы 2 получаем, что всякая функция из M^+ является нижней границей для $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} V^+(x, \delta)$.

Отсюда имеем, что поточечный супремум функций из M^+ , который будем обозначать через $V^+(x)$, является нижней границей для $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} V^+(x, \delta)$.

Допустим, нам удастся показать, что $V^+(x) = V^-(x) = V(x)$.

Тогда, поскольку

$$V^+(x) \leq \lim_{\delta \rightarrow 0^+} V^+(x, \delta) \leq \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0^+} V^-(x, \delta) \leq V^-(x),$$

получаем, что функции $V^-(x, \delta)$ и $V^+(x, \delta)$ при $\delta \rightarrow 0^+$ сходятся к $V(x)$. Это и означает, что рассматриваемая игра на выживание имеет обобщенную функцию значения игры.

Следующая теорема формулирует достаточное условие, гарантирующее равенство $V^+(x) = V^-(x)$, а следовательно, и существование обобщенного значения дифференциальной игры на выживание.

Теорема 3. Пусть вектор-функция $g(x, y, z)$ такова, что для любого вектора c математическое ожидание $E(c, g(x, y, z))^2 > 0$, где математическое ожидание берется по паре оптимальных стратегий в игре $(c, g(x, y, z))$.

Пусть, кроме того, существует функция $V(x)$ с ограниченными и непрерывными производными, вплоть до третьего порядка в некоторой открытой области R , содержащей внутри себя замыкание S , и удовлетворяющая условиям:

- 1) $L(V) = 0$ во всех внутренних точках S ;
 2) $\text{Val}(D_{yz}V) = 0$ во всех внутренних точках S ;
 3) градиент $V(x)$ отличен от нуля в R ;
 4) $V(x) = b(x)$, когда $x \in B$.

Тогда $V^+(x) = V^-(x) = V(x)$ и функция $V(x)$ является обобщенным значением дифференциальной игры на выживание.

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ определим функции

$$V_\varepsilon^+(x) = V(x) - \varepsilon \text{Max } b^2(x) + \varepsilon V^2(x)$$

и функции

$$V_\varepsilon^-(x) = V(x) + \varepsilon \text{Max } b^2(x) - \varepsilon V^2(x).$$

Легко видеть, что

$$D_{yz} V_\varepsilon^+(x) = (1 + 2\varepsilon V) D_{yz} V, \quad D_{yz} V_\varepsilon^-(x) = (1 - 2\varepsilon V) D_{yz} V.$$

При достаточно малом ε значения игр $D_{yz} V_\varepsilon$ и $D_{yz} V$ равны между собой и равны нулю (условие 2 теоремы): отсюда легко получаем, что если $L(V_\varepsilon^+) \geq c > 0$, то V_ε^+ принадлежит M^+ . Аналогично из $L(V_\varepsilon^-) \leq c < 0$ следовало бы, что $V_\varepsilon^- \in M^-$. Однако два последних неравенства могут быть доказаны дословным повторением рассуждений доказательства похожей теоремы из [5].

Так как, кроме того,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} V_{\varepsilon}^{+}(x) = V(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} V_{\varepsilon}^{-}(x),$$

то теорема доказана.

Заметим, что достаточные условия теоремы одновременно гарантируют непустоту классов M^{+} и M^{-} (функции V_{ε}^{+} при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ принадлежат M^{+} , а функции V_{ε}^{-} при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ принадлежат M^{-}).

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Hausner. Optimal strategies in games of survival. R. M. 777, 1952.
2. Р. Беллман. Динамическое программирование. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
3. O. Milnor, O. Sharplay. On games of survival. Ann. Math. 1957, St. N 39.
4. И. В. Романовский. Многомерные случайные блуждания игрового типа. Вестн. Ленингр. ун-та, 1962, № 7.
5. H. Scarf. On differential games with survival payoff. Ann. Math., 1957, St. N 39.
6. A. Wald. Statistical decision functions. 1950.
7. Х. Д. Миллс. Маргинальные значения матричных игр и задач линейного программирования. Линейные неравенства и смежные вопросы. М., Изд-во иностр. лит., 1959.

Поступила в редакцию
11 XI 1965