

Возможно, нам неизвестны некоторые достоинства языка событий, оправдывающие его повсеместное распространение в качестве рабочего языка систем СПУ. Мы просим компетентных специалистов высказаться по этому поводу. Одно несомненно: только всестороннее обсуждение этого вопроса поможет правильно решить, какой из двух возможных языков (а может быть, оба) нужно оставить в будущем.

Поступила в редакцию
9 II 1966

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ФУНКЦИОНАЛОВ, ЗАДАННЫХ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛЬЮ *

В. А. СТАРОСЕЛЬСКИЙ

(Москва)

Методы оптимального распределения занимают существенное место среди математических методов, которые используются при решении проблем организации производства, экономики и исследования операций.

Многие практические задачи из этих областей были успешно решены методами математического программирования, и в настоящее время имеется достаточный опыт применения их на практике [1].

Однако по мере развития этой проблематики все чаще стали появляться задачи, связанные с оптимизацией процессов управления, для решения которых методы математического программирования оказываются непригодными.

В этих случаях применение аппарата математического программирования для решения задач оптимального распределения ввиду грубой формализации не представляет особого интереса для практики.

С другой стороны, создание методов решения задач математического программирования, сформулированных с необходимой общностью (нелинейный функционал, учет случайных факторов и др.), наталкивается на серьезные трудности, в частности на вычислительные.

Если же система достаточно сложна, то часто функцию цели вообще невозможно записать в явном виде. Для исследования процессов функционирования сложных систем с учетом широкого круга действующих факторов успешно используется метод статистического моделирования [2].

Статистическое моделирование позволяет в принципе вычислять значения любых функционалов от параметров системы, включенных в модель. Поэтому существенное значение имеет разработка методов решения задач математического программирования для случая, когда функция цели и ограничения не заданы аналитически, а с помощью модели.

Н. П. Бусленко и Г. А. Соколовым [3] был предложен метод, позволяющий оптимизировать функционал, заданный с помощью статистической модели. К сожалению, метод работает только в случае выпуклого функционала. Все рассуждения в [3] ведутся в общем виде, и вычислительная сторона вопроса почти не затронута.

К настоящему моменту этот метод отработан и в процессе применения частично изменен к условному примеру, где изучаются системы, представляющие собой системы массового обслуживания.

Задача имеет следующую постановку.

Пусть имеется система массового обслуживания с тремя каналами; заявки поступают двумя потоками по пуассоновскому закону распределения с параметрами λ_1 и λ_2 . Заявка первого потока поступает на обслуживание на первый канал и, если он занят, поступает на второй. В случае занятости второго канала заявка теряется. Заявка второго потока поступает на обслуживание на второй канал, если он занят — на третий и в случае занятости его также теряется. Время обслуживания τ каждой заявки свободным каналом определяется показательным законом распределения с параметрами μ_1 , μ_2 , μ_3 . Потеря требования приводит к убытку, равному a_1 или a_2 соответственно. Простой канала в единицу времени также приводит к убытку, равному соответственно c_1 , c_2 , c_3 . Требуется найти такие μ_1 , μ_2 , μ_3 , чтобы суммарный убыток был минимальным.

В литературе [4] есть описание решения похожей задачи, полученного аналитическим путем, но в данном случае мы преследовали цель отработки метода Бусленко-Соколова и поэтому целевую функцию находили при помощи модели Монте-Карло.

* Автор выражает благодарность руководителю группы математического моделирования сложных систем ЦЭМИ АН СССР Х. Ш. Маргулису, под чьим непосредственным руководством велась настоящая работа, а также чл.-корр. АН СССР Н. П. Бусленко за систематические консультации и советы.

Ниже приводятся результаты численных расчетов решения этой задачи по данному методу при следующих параметрах:

$\lambda_1 = 0,4$; $\lambda_2 = 0,6$; $\alpha_1 = 3$; $\alpha_2 = 4$; $c_1 = 7$; $c_2 = 8$; $c_3 = 9$ и переменных μ_1, μ_2, μ_3 .

$\mu^0 \begin{cases} \mu_1 = 1, \\ \mu_2 = 3, \\ \mu_3 = 4, \end{cases}$	$f(\mu^0) = 36625,2498;$	$\mu^4 \begin{cases} \mu_1 = 8,75, \\ \mu_2 = 9,53125, \\ \mu_3 = 8,125, \end{cases}$	$f(\mu^4) = 29697,3809;$
$\mu^1 \begin{cases} \mu_1 = 5, \\ \mu_2 = 8,75, \\ \mu_3 = 7,5 \end{cases}$	$f(\mu^1) = 34257,3106;$	$\mu^5 \begin{cases} \mu_1 = 7,5, \\ \mu_2 = 7,5, \\ \mu_3 = 5, \end{cases}$	$f(\mu^5) = 29543,7671;$
$\mu^2 \begin{cases} \mu_1 = 8,125, \\ \mu_2 = 5, \\ \mu_3 = 9,84375, \end{cases}$	$f(\mu^2) = 34009,4225;$	$\mu^6 \begin{cases} \mu_1 = 5, \\ \mu_2 = 7,5, \\ \mu_3 = 1,71875, \end{cases}$	$f(\mu^6) = 29376,6765;$
$\mu^3 \begin{cases} \mu_1 = 7,5, \\ \mu_2 = 7,5, \\ \mu_3 = 8,75, \end{cases}$	$f(\mu^3) = 29799,5936;$	$\mu^7 \begin{cases} \mu_1 = 5, \\ \mu_2 = 8,75, \\ \mu_3 = 5, \end{cases}$	$f(\mu^7) = 29356,9353;$
		$\mu^8 \begin{cases} \mu_1 = 5, \\ \mu_2 = 8,75, \\ \mu_3 = 5, \end{cases}$	$f(\mu^8) = 29356,9383.$

Как видим, оптимизация методом Бусленко — Соколова дает хорошие результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн. Задачи и методы линейного программирования. М., «Сов. радио», 1961.
2. Н. П. Бусленко. Математическое моделирование производственных процессов на цифровых вычислительных машинах. М., «Наука», 1964.
3. Н. П. Бусленко, Г. А. Соколов. Об одном классе задач оптимального распределения. Экономика и матем. методы, 1965, т. 1, вып. 1.
4. А. Кофман, Р. Крюон. Массовое обслуживание. Теория и приложения. М., «Мир», 1965.

Поступила в редакцию
7 VI 1966

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЧИСЛА ШАГОВ СИМПЛЕКС-МЕТОДА

Н. Н. ВОРОБЬЕВ

(Ленинград)

В работе [1] приводятся математическое ожидание и дисперсия числа шагов в методах линейного программирования типа симплекс-метода, если переход от одной вершины многогранника допустимых точек к другой, с меньшим значением целевой функции, осуществляется случайно, причем все такие вершины принимаются равновероятными. После этого вероятность тех или иных отклонений числа шагов от его математического ожидания оценивается на основе неравенства Чебышева.

Далее описывается несколько иной подход к вопросу, основанный на том, что в случае большого числа вершин многогранника доля точек, остающихся после очередного шага, может принимать значения, расположенные в интервале $(0, 1)$ «достаточно плотно». Поэтому распределение числа остающихся вершин мало отличается от равномерного на $(0, 1)$ (т. е. от распределения, имеющего на $(0, 1)$ единичную плотность, а вне этого интервала — нулевую) и может быть им заменено. Отсюда выводится, что при больших N_1 и N_2 число шагов, за которые задача поиска экстремальной вершины многогранника с N_1 вершинами сводится к аналогичной задаче для случая N_2 вершин ($N_2 < N_1$), распределено асимптотически по закону Пуассона с параметром $\log N_1 / N_2$.

В самом деле, при переходе от числа N_1 вершин к числу N_2 мы как бы переходим от их полного числа к доле $\gamma = N_2 / N_1$. Каждый k -й шаг состоит в умножении доли вершин Y_{k-1} , имевшихся к началу этого шага, на долю X_k от Y_{k-1} вершин, остающихся после этого шага.

Таким образом, мы должны исследовать случайную величину Z , принимающую значение n в том и только в том случае, когда

$$X_1 X_2, \dots, X_{n-1} X_n = Y_n < \gamma < X_1 X_2, \dots, X_{n-1} = Y_{n-1}. \quad (1)$$

Очевидно, случайные величины $X_1, X_2, \dots$ можно считать независимыми. Кроме того, будем предполагать, что каждая случайная величина X_k равномерно распределена на интервале $(0, 1)$:

$$P(X_k < \alpha) = \alpha, \quad \alpha \in [0, 1]. \quad (2)$$

Положим

$$-\log X_k = U_k, \quad -\log Y_k = V_k.$$

В силу (2) имеем

$$P(U_k \geq \beta) = P(-\log X_k \geq \beta) = P(X_k \leq e^{-\beta}) = e^{-\beta},$$

$$P(U_k < \beta) = 1 - e^{-\beta}.$$

Значит U_k имеет плотность $f_{u_k}(x) = e^{-x}$, $x \geq 0$, а так как $V_k = U_1 + \dots + U_k$, случайная величина V_k имеет плотность $f_{v_k}(x) = x^k e^{-x} / k!$, $x \geq 0$.

Неравенство (1) равносильно неравенству

$$V_{n-1} < -\log \gamma < V_n = V_{n-1} + U_n, \quad (3)$$

выполнение которого означает, что при некотором $t \in [0, -\log \gamma]$ будет $V_{n-1} = t$, $U_n > -\log \gamma - t$.

Случайные величины V_{n-1} и U_n независимы. Поэтому вероятность неравенства (3) равна:

$$\begin{aligned} \int_0^{-\log \gamma} f_{v_{n-1}}(t) P(U_n > -\log \gamma - t) dt &= \int_0^{-\log \gamma} \frac{t^{n-1} e^{-t}}{(n-1)!} e^{\log \gamma + t} dt = \\ &= \frac{\gamma}{(n-1)!} \int_0^{-\log \gamma} t^{n-1} dt = \frac{\gamma (-\log \gamma)^n}{n!} = \frac{N_2}{n! N_1} \log^n \frac{N_1}{N_2}. \end{aligned}$$

Следовательно, случайная величина Z распределена асимптотически по закону Пуассона с параметром $\log N_1 / N_2$. Не оценивая характера полученной асимптотики, ее можно, по крайней мере в отношении N_2 , считать достаточно удовлетворительной: даже в том наименее благоприятном случае, когда $N_2 = 1$, получаем в качестве математического ожидания числа шагов (в данном случае это будет число шагов, приводящих к полному разрешению задачи) $\log N_1$, что при достаточно больших N_1 лишь незначительно (на постоянную Эйлера) отличается от соответствующего точного значения. Погрешность в асимптотических характеристиках числа шагов объясняется заменой дискретных значений непрерывными. Более точная оценка этой погрешности представляет собой интересную задачу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. И. Филиппович, О. М. Козлов. О числе шагов при решении задач линейного программирования симплекс-методом. В сб. Техническая кибернетика. Киев, Гостехиздат УССР, 1963.

Поступила в редакцию
21 XI 1966

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ВРЕМЕНИ РЕШЕНИЯ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

В. Б. РЕУТ

(Калинин)

Широкое использование в стохастических моделях транспортной задачи особенно остро ставит вопрос о затратах машинного времени на ее решение. Автором на основе венгерского метода разработана вычислительная схема решения транспортной задачи, названная методом логических шкал (МЛШ), позволяющая получить существенный выигрыш во времени.

Здесь мы приводим лишь некоторые результаты экспериментальной оценки по времени решения венгерским методом и МЛШ, полученные при использовании ЭВМ М-20.

Оценивалось время решения транспортных задач с квадратными и прямоугольными (сильно вытянутыми) матрицами стоимостей $\|\pi_{ij}\|$. Элементы матрицы π_{ij} были целыми числами, распределенными по равномерному закону в интервале $[0, \pi]$;

$$\pi_{ij} = E[\xi_{ij}\pi], \quad i = 1, 2, \dots, m; \\ j = 1, 2, \dots, n.$$

Величины a_i (число средств у i -го поставщика) и b_j (число средств, необходимое j -му потребителю) были также целыми числами, распределенными по равномерному закону в интервалах $[0, a]$, $[0, b]$ соответственно:

$$a_i = E[\xi_i a], \quad i = 1, 2, \dots, m; \\ b_j = E[\xi_j b], \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Здесь ξ_{ij} , ξ_i , ξ_j — случайные числа, распределенные по равномерному закону на $[0, 1]$. Некоторые результаты исследования представлены на рис. 1—3.

Наиболее трудоемким с точки зрения времени решения является случай, когда $ma \approx nb$.

Для квадратных матриц это соответствует условию $a \approx b$, для сильно вытянутых матриц ($m \ll n$) — $b \ll a$. На рис. 1, 2 представлены зависимости среднего времени решения $t_{\text{ср}} = f(n)$ от размерности квадратной матрицы при фиксированных значениях π , a и b . Кругками отмечены экспериментально полученные значения $t_{\text{ср}}$. (Усреднение для МЛШ проводилось по 50 реализациям, а для венгерского метода — по 20.)

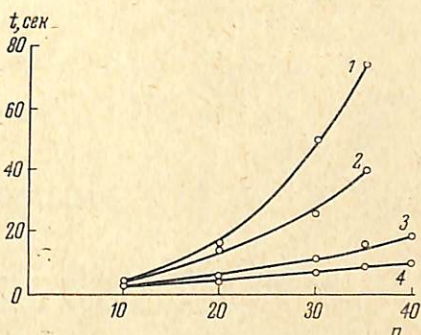


Рис. 1. $\pi = 64$; 1 — B, $a = 512$; 2 — B, $a = 8$; 3 — МЛШ, $a = 512$; 4 — МЛШ, $a = 8$

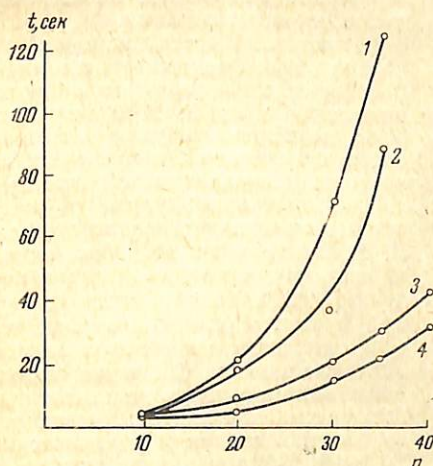


Рис. 2. $\pi = 2048$; 1 — B, $a = 512$; 2 — B, $a = 8$; 3 — МЛШ, $a = 512$; 4 — МЛШ, $a = 8$

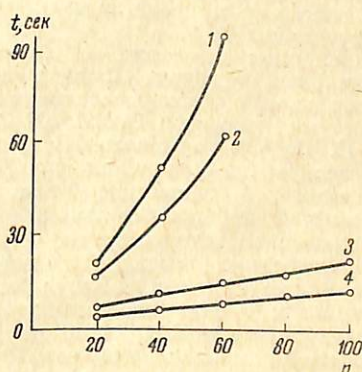


Рис. 3. $m = 20$, $a = 64$, $b_j = 1$, $j = 1, 2, \dots, n$; 1 — B, $\pi = 16384$; 2 — B, $\pi = 64$; 3 — МЛШ, $\pi = 16384$; 4 — МЛШ, $\pi = 64$

Для прямоугольных матриц b_j было фиксировано: $b_j = 1$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Из рис. 1—3 видно, что использование МЛШ позволяет сократить время решения сравнительно с венгерским методом в 3—10 раз.

Наиболее эффективен МЛШ при решении задач с сильно вытянутыми матрицами стоимостей. Линейный характер зависимости времени от параметра n для прямоугольных матриц дает основание считать, что для матриц большой размерности выигрыш во времени решения при использовании МЛШ будет возрастать.

В случае прямоугольных матриц время решения не превосходило (1,5—2) $t_{\text{ср}}$ для обоих методов.

Поступила в редакцию
9 II 1966