

МЕТОД АНАЛИЗА В ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

И. М. БУРШТЕЙН

(МОСКВА)

При исследовании конкретной экономической задачи закономерна постановка вопроса относительно возможности и рациональности приложения теории динамического программирования. Для наглядного анализа решения на каждом из этих двух этапов в настоящей работе развивается метод отображения многоступенчатых процессов структурными схемами и перестроения последних в оптимально управляемые.

Полученная структурная схема приводится затем, следуя правилам эквивалентных преобразований, к такому виду, которому соответствует наиболее рациональный процесс вычислений или наиболее эффективный аналитический аппарат.

1. ЭЛЕМЕНТЫ НАПРАВЛЕННЫХ СТРУКТУРНЫХ СХЕМ

Система уравнений моделируется структурной схемой, состоящей из ветвей и узлов.

Ветвь отображает операцию направленного преобразования независимой переменной в функцию (рис. 1, а); направление операции указывается стрелкой при вершине ветви.

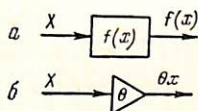


Рис. 1

Операция умножения переменной на постоянный коэффициент отображается ветвью специального вида (рис. 1, б).

Пример 1. Дана система линейных алгебраических уравнений

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \quad (1)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2.$$

Для построения моделирующей схемы уравнения (1) тождественно преобразуются

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2, \\ x_2 &= \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнения (2) рассматриваются как уравнения узлов схемы, построенной на рис. 2, а.

Заметим, что переменная на выходе i -го узла (рис. 2, а) обозначается через x_i . Независимая переменная, поступающая в i -й узел извне, обозначается через b_i и т. д.

Текущее значение суммы, получаемое в каждом узле схемы, повторяется как независимое переменное на входе *всех* ветвей, выходящих из этого узла.

Отмеченные свойства ветвей и узлов определяют рассматриваемую структурную схему как *направленную*. Это качество обеспечивает возможность *эквивалентных* преобразований схем.

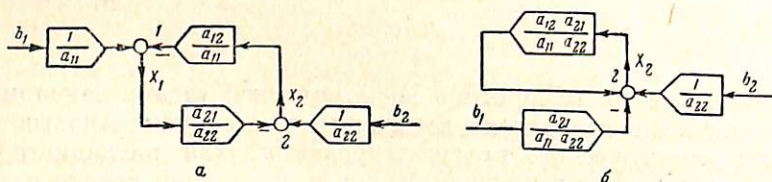


Рис. 2

Преобразование схемы именуется эквивалентным, если значение зависимой переменной на выходе избранного узла остается при этом неизменным.

Эквивалентное преобразование схемы отображает операцию тождественного преобразования исходной системы уравнений или операцию исключения некоторого числа неизвестных.

Пример 2. Преобразование рис. 2, а в рис. 2, б является эквивалентным относительно узла 2; при этом исключается переменная x_1 .

Различные правила эквивалентных преобразований линейных структурных схем рассматриваются в литературе по теории автоматического регулирования (см., например, [1]).

2. ЭЛЕМЕНТЫ СТРУКТУРНЫХ СХЕМ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ

Возможность приложения метода направленных структурных схем к системам (моделям) экономической кибернетики разрешается через преодоление возникающего противоречия в определении понятия «узел».

Существо вопроса состоит в следующем.

В структурных схемах технической кибернетики узел рассматривается как сумматор и *повторитель* формируемого сигнала по *всем* выходящим из этого узла ветвям.

В экономических моделях после операции суммирования материальных потоков может иметь место операция *распределения*. Это означает, что отображение экономического процесса структурной схемой должно сопровождаться выполнением следующего условия: сумма коэффициентов усиления по всем ветвям, выходящим из каждого распределительного узла, должна быть равна единице.

Последнее условие естественно учитывается в структурной схеме, если все коэффициенты усиления ветвей определены заранее в численной форме. Если упомянутые коэффициенты подлежат определению, т. е. выражаются первоначально алгебраическими символами, то отображение названного правила в структурной форме не представляется самоочевид-

ным. Для отображения операции распределения при одновременном сохранении первоначального определения понятия «узел» здесь вводится специальная схема, представленная на рис. 3, а. Таким образом, отображается соотношение $x_i = \theta x_i + (1 - \theta)x_i$, $0 \leq \theta \leq 1$.

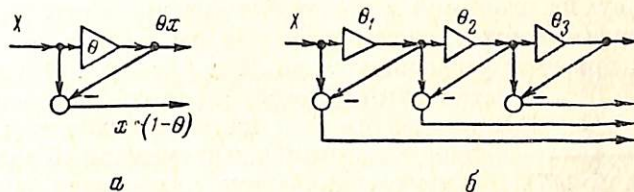


Рис. 3

Использование схемы рис. 3, а как элемента позволяет наглядно представить операцию распределения независимой переменной на любое число частей. Например, распределение переменной x на четыре части представлено на рис. 3, б, где $0 \leq \theta_k \leq 1$, $k = 1, 2, 3$.

3. ЭЛЕМЕНТЫ ОПТИМАЛЬНО-УПРАВЛЯЕМЫХ СТРУКТУРНЫХ СХЕМ

Рассмотрим простейшую распределительную задачу. Требуется разделить независимую переменную x на две части, т. е. $x = x_1 + x_2$, таким образом, чтобы выражение $f_1(x_1) + f_2(x_2)$ приняло максимальное значение.

Таким образом, необходимо каждый раз находить значение параметра ξ , при котором имеет место соотношение

$$L(x) = \max_{0 \leq \xi \leq x} [f_1(\xi) + f_2(x - \xi)] \quad (3)$$

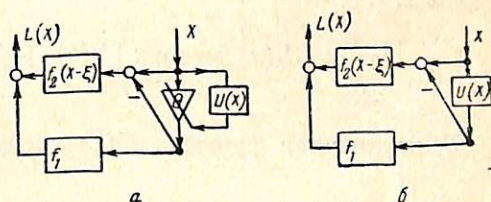


Рис. 4 *

На рис. 4, а показана структурная схема гипотетического экстремального регулятора, обеспечивающего автоматическое выполнение условия (3) для любого значения распределяемой переменной x .

При этом через $U(x)$ обозначается уравнение экстремального регулятора, которое будем именовать *управляющей функцией*. Операция изменения коэффициента усиления θ в правой ветви на рис. 4, а условно обозначена наклонной стрелкой.

Другой вариант начертания этой схемы представлен на рис. 4, б.

Пример 1. Если в уравнении (3) принять

$$f_1(\xi) = 2\sqrt{\xi}, \quad f_2(x - \xi) = \sqrt[4]{(x - \xi)^3},$$

тогда уравнение управляющей функции будет иметь вид

$$\xi = \sqrt{x + 0,25} - 0,5.$$

При этом целевая функция в развернутом виде записывается:

$$L(x) = 2\sqrt{\sqrt{x + 0,25} - 0,5} + \sqrt[4]{(x - \sqrt{x + 0,25} + 0,25)^3}.$$

* На рис. 4 f_1 есть $f_1(\xi)$.

4. СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ ОПТИМИЗИРУЕМЫХ МНОГОШАГОВЫХ ПРОЦЕССОВ

В качестве первого примера рассматривается «многошаговый процесс распределения ресурсов» [2]. Напомним условие задачи.

Начальная сумма вложений x может быть распределена на две части: ξ и $x - \xi$, которые соответственно дают доходы $f_1(\xi)$ и $f_2(x - \xi)$ и за счет издержек при этом уменьшаются до $a\xi$ и $b(x - \xi)$. Эти два остатка затем суммируются; процесс распределения повторяется при тех же условиях и т. д. Требуется получить максимальный суммарный доход.

Структурная схема для случая двухшагового процесса представлена на рис. 5.

Из рассмотрения рис. 5 сразу становится совершенно очевидным смысл «принципа оптимальности» [2]. Конкретно это означает, что в любом случае переменная x_1 в конечном узле 1 должна быть распределена оптимальным образом, т. е.

$$L_1(x_1) = \max_{0 \leq \xi_1 \leq x_1} [f_1(\xi_1) + f_2(x_1 - \xi_1)], \quad (4)$$

Рис. 5

Из соотношения (4) следует уравнение функции управления $U_1(x_1)$.

Аналогично переменная x должна быть распределена оптимальным образом, однако с учетом при этом оптимального распределения остатка в узле 1, т. е.

$$L(x) = \max_{0 \leq \xi \leq x} [f_1(\xi) + f_2(x - \xi) + L_1(x_1)], \quad (5)$$

Управляющая функция $U(x)$ следует уже из уравнения (5).

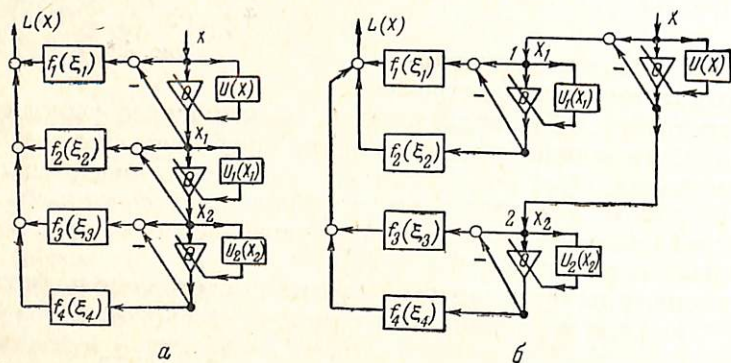


Рис. 6

Изложенное выше и рассмотрение рис. 5 поясняет также метод рекуррентных функциональных уравнений [2].

В качестве второго примера рассмотрим задачу нахождения максимума функции

$$L(x) = \max [f_1(\xi_1) + \dots + f_4(\xi_4)] \quad (6)$$

при ограничениях $x = \xi_1 + \dots + \xi_4$, $\xi_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, 4$.

В отличие от предыдущего примера рассмотрение данной задачи в форме многошагового процесса основывается исключительно на конструктивном подходе.

Варианты многошаговых процессов, отображающих уравнение (6), даны на рис. 6.

5. СТРУКТУРНАЯ СХЕМА КАК ОТОБРАЖЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ БЛОК-ПРОГРАММЫ

Оптимизация многошаговых процессов методами динамического программирования выполнима для значительной части задач лишь в численном виде.

Для отыскания, например, дискретных значений управляющей функции $\xi_n = U(nT)$ и целевой функции $L(nT)$ простейшего распределительного процесса (рис. 4, а) строится специальная таблица, известная из литературы [3].

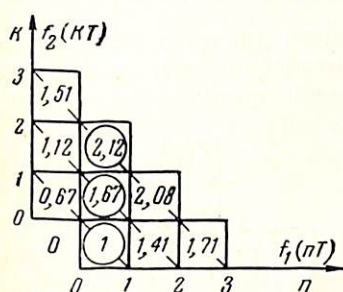


Рис. 7

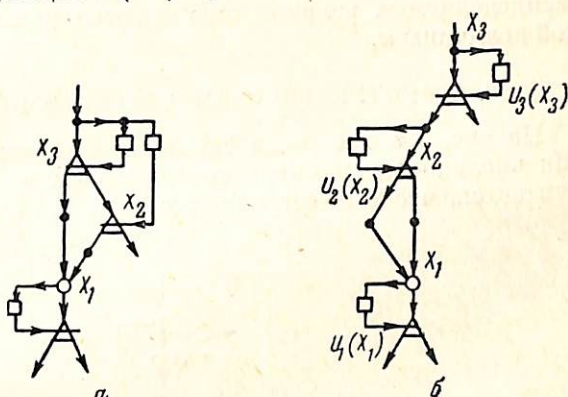


Рис. 8

Начальная часть аналогичной таблицы для конкретного примера воспроизводится на рис. 7. Здесь вдоль осей абсцисс и ординат отложены значения n и k и соответственно $f_1(nT)$ и $f_2(kT)$. Число внутри клетки с координатами (n, k) равно $f_1(nT) + f_2(kT)$ — по этому правилу заполняется таблица и т. д.

Пример 1. Рис. 8, а и б отображают * один и тот же распределительный процесс.

Каждый распределительный узел на любой из структурных схем рис. 8 соответствует реализации вычислительного цикла согласно рис. 7. Отсюда следует, что рис. 8 отображает различные варианты вычислительной блок-программы оптимизации одного и того же многошагового процесса.

Предыдущее рассмотрение позволяет сделать некоторые важные для приложений выводы.

Оптимальная вычислительная схема для оптимизации многошагового процесса наглядно конструируется в форме структурной схемы.

Первое и главное условие оптимального построения структурной схемы — минимизация числа групп экстремальных регуляторов, имеющих общий вход, и предельного числа регуляторов, объединенных общим входом.

Оптимальной, однако, является вторая схема (рис. 8, б). Очередность построения согласно принципу оптимальности управляющих функций или, что то же, программ регуляторов $U_i(x_i)$ соответствует на рис. 8, б номерам индексов.

* Для большей отчетливости схемы выполнены как блочные; распределительные узлы при этом условно обозначены треугольниками.

Второе условие оптимальности: структурная схема должна отображать оптимальную вычислительную программу.

Определение оптимальной вычислительной программы относится к специальной области программирования универсальных вычислительных машин и возможно в связи с конкретной задачей и конкретной вычислительной машиной.

Выполнение второго условия оптимальности является решающим для реализации, например, крупномасштабных распределительных процессов.

Пример 2. Схемы, показанные на рис. 6, являются одинаково оптимальными в отношении первого условия. Если принять, что функции $f_1(\xi), \dots, f_4(\xi)$ близки по своему характеру и что вычислительная машина многопрограммна, то оптимальной в отношении второго условия является вторая схема (рис. 6, б). Именно эта схема соответствует минимальному объему вычислений, так как в узлах 1 и 2 предельные значения распределяемых величин оцениваются как половина общей распределяемой величины x .

6. СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ БЕСКОНЕЧНОШАГОВЫХ ПРОЦЕССОВ

На рис. 9, а построена схема бесконечношагового процесса планирования численности племенного поголовья в животноводческом хозяйстве. Считается, что в конце каждого года весь годовой приплод отделяется.

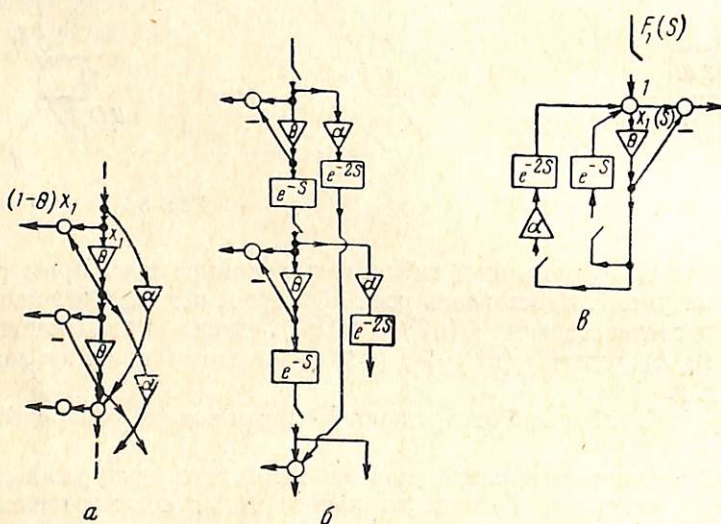


Рис. 9

Затем к основному поголовью присоединяется контингент двухлеток. После этого определенная часть поголовья отделяется на сбыт и т. д.

На рис. 9, а приняты обозначения: α — доля годового прироста, θ — доля сохраняемого в хозяйстве товарного поголовья, $1 - \theta$ — доля сбываемого поголовья.

Шаговый характер процесса и явления запаздывания наглядно отображены в эквивалентной импульсной схеме (рис. 9, б), где через e^{-s} и e^{-2s} обозначены передаточные функции ветвей, обладающих задержкой в 1 и 2 года соответственно [4]; все импульсные элементы на рис. 9, б замыкаются синхронно с интервалом в один год. Однократный дискретный характер процессов во всех узлах этой схемы (рис. 9, б) позволяет воспроизвести эти процессы в эквивалентной импульсной схеме с положитель-

ными обратными связями (рис. 9, в) и затем описать эти процессы в замкнутом виде.

Пусть требуется найти значение коэффициента θ , при котором обеспечивается поддержание поголовья на постоянном уровне.

Для этого предварительно находим дискретное изображение Лапласа (Z -изображение) переменной на выходе единственного узла импульсной системы рис. 9, в [5].

Обозначим изображающее Лапласа переменной на входе системы рис. 9, в через $F_1(s)$.

Составляем изображающее уравнение единственного узла системы

$$x_1(s) = F_1(s) + x_1(s) \cdot \theta e^{-Ts} + x_1(s) \cdot \theta \alpha e^{-2Ts},$$

из которого после выполнения Z -преобразования для периода $T = 1$ год

$$x_1^*(z) = F_1^*(z) + x_1^*(z) \theta z^{-1} + x_1^*(z) \theta \alpha z^{-2}$$

находим

$$x_1(z) = \frac{F_1^*(z)}{1 - \theta z^{-1} - \alpha \theta z^{-2}} = \frac{z^2 F_1^*(z)}{z^2 - \theta z - \alpha \theta} \quad (7)$$

Поддержание поголовья на постоянном уровне означает нахождение системы рис. 9, в на границе устойчивости. Как известно [6], для этого необходимо, чтобы один полюс Z -изображения (7) был равен единице.

Разрешаем характеристическое Z -уравнение системы рис. 9, в

$$z_{1,2} = 0,5\theta \pm \sqrt{0,25\theta^2 + \alpha\theta}$$

и записываем необходимое условие пребывания системы на границе устойчивости в форме уравнения $0,5\theta + \sqrt{0,25\theta^2 + \alpha\theta} = 1$, из которого окончательно находим

$$\theta = \frac{1}{\alpha + 1}. \quad (8)$$

Рассмотренный выше конкретный пример позволяет сделать следующие выводы.

Бесконечношаговые процессы отображаются структурными схемами двух видов: разомкнутыми и замкнутыми. Переход к структурным схемам с обратной связью адекватен описанию бесконечношаговых процессов наиболее эффективным математическим аппаратом технической кибернетики. Результатом этого является обогащение методов теории динамического программирования

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Траксел. Синтез систем автоматического регулирования. М., Машгиз, 1959.
2. Р. Беллман. Динамическое программирование. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
3. А. Вайсман. Научное программирование в промышленности и торговле. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
4. М. Ф. Гарднер, Д. Л. Бэрнс. Переходные процессы в линейных системах. М., Физматгиз, 1961.
5. И. М. Бурштейн. Метод решения уравнений многоконтурных импульсных систем. Автоматика и телемеханика, т. XXII, № 12, 1961, стр. 1689—1693.
6. Я. З. Цыпкин. Теория импульсных систем. М., Физматгиз, 1958.

Поступила в редакцию
10 III 1965