ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1965
том I, вып. 5

АЛГОРИТМ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Р. А. САРЧИМЕЛИЯ

(Тбилиси)

В работе дается алгоритм для последовательного нахождения цифр разрядов целочисленного решения систем линейных алгебраических уравнений. Предложенный алгоритм основан на работе Л. А. Люстерника [1], где ищется значение функций (логарифма и тригонометрических функций) в двоичной системе счисления поразрядно, от старшего разряда к младшему. Для каждой конкретной функции применяется искусственный прием, позволяющий находить значения старшего разряда: найдя старший разряд, переходят к следующему и т. д.

В настоящей работе идея Л. А. Люстерника перенесена для целочисленного решения определенной системы линейных алгебраических уравнений, у которой все коэффициенты — целые числа. В рассматриваемой задаче приходится постепенно находить цифры разрядов, начиная с младшего разряда. В работе дается простой прием, позволяющий за конечное число шагов довести данную систему к эквивалентной системе линейных алгебраических уравнений, у которой элементы соответствующей квадратной матрицы, расположенные по диагонали, являются нечетными, а остальные — четными числами.

Для целочисленного решения такой системы линейных алгебраических уравнений постепенно находим цифры разрядов двоичного представления от младшего к старшему разряду.

Предложенный алгоритм применяется при решении задач целочисленного линейного программирования, а именно для нахождения одновременно вместе с неизвестными значений линейной формы.

В работе дается компактная схема для нахождения той линейной формы, которая является минимальной среди разных линейных функций; неизвестные, входящие в них, удовлетворяют определенным системам линейных алгебраических уравнений и являются целыми — неотрицательными.

Эту схему можно использовать для решения таких задач линейного целочисленного программирования, у которых оптимальная целочисленная точка ищется на краях выпуклого многогранника. Рассматриваемые здесь системы подразумеваются невырожденными.

По сравнению с другими методами число элементарных операций в предложенном алгоритме значительно меньше.

1. АЛГОРИТМ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим невырожденную систему алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{1}$$

где коэффициенты $a_{ij}(i, j = 1, 2, \ldots, m)$ и правые части $b_i(i = 1, 2, \ldots, m)$ представляют целые числа. В дальнейшем нас будет интересовать целочисленное решение системы (1). Переход от системы (1) к эквивалентной системе путем: а) изменения нумераций переменных, б) сложения уравнений и в) деления каждого из уравнений на 2 назовем элементарным преобразованием системы (1).

Систему линейных алгебраических уравнений (1), у которых диагональные элементы соответствующей квадратной матрицы являются нечетными, а остальные — четными числами, назовем приведенной.

Пусть a — целое число; обозначим

$$\bar{a} = \begin{cases} 1, & \text{если } a \text{ нечетное,} \\ 0, & \text{если } a \text{ четное.} \end{cases} \tag{2}$$

Лемма. *Если система* (1) *имеет целочисленное решение, тогда при помощи конечного числа элементарных преобразований можно получить эквивалентную приведенную систему.*

Доказательство. Не нарушая общности, можно предположить, что $a_{11} = 1$. Допустим теперь, что при помощи конечного числа элементарных преобразований из системы (1) получена ее эквивалентная система:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{(0)} x_j = b_i^{(0)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s), \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = b_i \qquad (i = s + 1, \ldots, m),$$

где

$$\bar{a}_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j \quad (i, j = 1, 2, \ldots, s). \end{cases} \tag{4}$$

Из системы (3) составим линейную комбинацию уравнений $(i = 1, 2, \ldots, s + 1)$, так, что коэффициенты при неизвестных x_j $(j = 1, 2, \ldots, s)$ получились бы четными. Для этого i-е уравнение из системы (3) умножим на $\bar{a}_{s+1,\, i}$, просуммируем $(i = 1, 2, \ldots, s)$ и добавим $s + 1$ уравнение, тогда получим:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{s+1,\, j}^{(0)} x_j = b_{s+1}^{(0)}, \tag{5}$$

где

$$a_{s+1,\, j}^{(0)} = a_{s+1,\, j} + \sum_{i=1}^{m} a_{ij}^{(0)} \bar{a}_{s+1,\, i} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

и

$$b_{s+1}^{(0)} = b_{s+1} + \sum_{i=1}^{m} b_i^{(0)} \bar{a}_{s+1,\, i},$$

$\bar{a}_{s+1,j}^{(0)} = 0\,(j = 1, 2, \ldots, s)$, а начиная с $j = s+1, \ldots, m$ имеем два случая:
1) $\bar{a}_{s+1,j}^{(0)} = 1$, $j_1 \in I\ (s+1, \ldots, m)$ или 2) $\bar{a}_{s+1,j}^{(0)} = 0\ (j = s+1, \ldots, m)$.

В первом случае путем изменения нумерации переменных $x_j (j = s+1, \ldots, m)$ можно получить $j_1 = s+1$ и составить систему, эквивалентную (3):

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{(1)} x_j = b_i^{(1)} \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{6}$$

где

$$a_{ij}^{(1)} = \begin{cases} a_{ij}^{(0)} + \bar{a}_{i,\, s+1}^{(0)} a_{s+1,\, j}^{(0)} & (i = 1, 2, \ldots, s;\ j = 1, 2, \ldots, m), \\ a_{s+1,\, j}^{(0)} & (i = s+1;\ j = 1, 2, \ldots, m), \\ a_{ij} & (i = s+2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

и

$$b_i^{(1)} = \begin{cases} b_i^{(0)} + \bar{a}_{i,\, s+1}^{(0)} b_{s+1}^{(0)} & (i = 1, 2, \ldots, s), \\ b_{s+1}^{(0)} & (i = s+1), \\ b_i & (i = s+2, \ldots, m); \end{cases} \tag{7}$$

$$\bar{a}_{ij}^{(1)} = \begin{cases} 1, \text{ если } & i = j, \\ 0, \text{ если } & i \neq j \quad (i, j = 1, 2, \ldots, s+1). \end{cases}$$

От системы (3) при помощи конечного числа элементарных преобразований мы перешли к системе (6), так что если выполняется условие (4), будет выполняться условие (7), что и доказывает справедливость леммы для первого случая.

Во втором случае должно быть $\bar{b}_{s+1}^{(0)} = 0$ (в противном случае система (3) или (1) не имеет целого решения).

Преобразуем опять систему (3), где вместо $s+1$-уравнения рассматривается уравнение (5), разделенное на два; в результате получим эквивалентную систему, у которой в $(s+1)$-м уравнении для коэффициентов $a_{s+1,\, j}^{(2)}$ при неизвестных $j = s+1, \ldots, m$ будем иметь два случая: или 1) $\bar{a}_{s+1,\, j}^{(2)} = 1, j \in I(s+1, \ldots, m)$, или 2) $a_{s+1,\, j}^{(2)} = 0\ (j = s+1, \ldots, m)$. Соответственно этим случаям применим вышеуказанное преобразование и т. д.

Покажем, что после конечного числа элементарных преобразований будем иметь только первый случай.

Между детерминантами преобразованных систем имеется следующая зависимость:

$$|\det \|a_{ij}\|| = 2^{s_1} |\det \|a_{ij}^1\||,$$

где s_1 указывает, сколько раз разделили уравнение на 2. Так как система (1) невырожденная, то s_1 будет конечным числом и поэтому к первому случаю приводит конечное число элементарных преобразований. Лемма доказана.

Допустим, что система (1) имеет приведенный вид и рассмотрим следующую последовательность вспомогательных систем:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j^{(k)} = b_i^{(k)} \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{8}$$

где k — номер системы, $b_i^{(0)} = b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ и свободные члены $b_i^{(k)}$ и $b_i^{(k+1)}$ таковы, что решения $x_j^{(k)}$ и $x_j^{(k+1)}$ удовлетворяют равенству

$$x_j^{(k)} = 2x_j^{(k+1)} + \bar{b}_j^{(k)} \quad (j = 1, 2, \ldots, m;\ k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{9}$$

Этого можно достигнуть, если величины $b_i^{(k-1)}$ определить из равенства:

$$b_i^{(k+1)} = \frac{b_i^{(k)} - \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} \bar{b}_j^{(k)}}{2} \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{10}$$

Очевидно, решение системы (1) можно найти при помощи последовательного применения формул (9) и (10).

Из (9) по индукции получаем:

$$x_j^{(0)} = 2_j^{(l+1)}\, x_j^{(l+1)} \sum_{k=0}^{l} \bar{b}_j^{(k)} 2^k \quad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{11}$$

Пусть $x_j^{(0)}$ — целое неотрицательное число. Тогда, если представим $x_j^{(0)}$ в двоичной системе счисления, то $x_j^{(l+1)}$ должно равняться нулю, а если $x_j^{(0)}$ — целое отрицательное число, тогда выберем l так, чтобы $x_j^{(0)} + 2^{l+1}$ оказалось неотрицательным целым числом; разложим его в двоичной системе, используя (11), получим $x_j^{(l+1)} = -1$.

Наконец, сделаем вывод: если $x_j^{(0)}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ — целые числа, тогда можно найти такое натуральное число l_0, что

$$x_j^{(l_0+p)} \begin{cases} 0, & \text{если } x_j^{(0)} \geqslant 0, \\ -1, & \text{если } x_j^{(0)} < 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m;\ p = 1, 2, \ldots), \end{cases} \tag{12}$$

и наоборот, если выполняется (12), тогда $x_j^{(0)}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ — целое число.

Теорема. *Для того, чтобы приведенная система имела целое решение, необходимо и достаточно существование такого конечного номера l_0, чтобы выполнялись следующие равенства:*

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \bar{b}_j^{(l_0+1)} = -b_i^{(l_0+1)} \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{13}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $x_j^{(0)}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ — целые; тогда согласно (12) и (13) для некоторого фиксированного l_0 имеем

$$x_j^{(l_0+p)} = -\bar{b}_j^{(l_0+p)} \quad (j = 1, 2, \ldots, m;\ p = 1, 2, \ldots). \tag{14}$$

Подставляя (14) в (8), получим

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\bar{b}_j^{(l_0+p)} = -b_i^{(l_0+p)} \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ p = 1, 2, \ldots). \tag{15}$$

Достаточность. Из (10) получаем

$$2b_i^{(l_0+2)} = b_i^{(l_0+1)} - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\bar{b}_j^{(l_0+1)} \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Подставим в это выражение (13) $b_i^{(l_0+2)} = b_i^{(l_0+1)}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Аналогично из (10) и (13) получим

$$b_i^{(l_0+p)} = b_i^{(l_0+1)} \quad (i = 1, 2, \ldots m;\ p = 2, 3, \ldots). \tag{16}$$

Из (13) и (16) получим (15) и, используя (8) (при $k = l_0 + p$; $p = 1, 2, \ldots$), имеем

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}[x_j^{(l_0+p)} + \bar{b}_j^{(l_0+p)}] = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ p = 1, 2, \ldots).$$

Так как система невырожденная, то

$$x_j^{(l_0+p)} = -\bar{b}_j^{(l_0+p)} \quad (j = 1, 2, \ldots, m;\ p = 1, 2, \ldots).$$

По определению (2) $\bar{b}_j^{(l_0+p)}$ — нуль или единица, тогда $x_j^{(l_0+p)}$ равно 0 или -1, т. е. удовлетворяется (12) и, следовательно, $x_j^{(0)}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ — целые и выражаются формулой (11) или

$$\overset{(0)}{x_j} = -2^{(l_0+1)}\overset{(l_0+1)}{\bar{b}_j} + \sum_{k=0}^{l_0} 2^k \overset{(k)}{\bar{b}_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{17}$$

Теорема доказана.

Легко показать, что условия (13), (15) и (16) эквивалентны.

Следствие. Для того чтобы приведенная система имела целое неотрицательное решение, необходимо и достаточно существование такого конечного номера l_0, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$b_i^{(l_0+1)} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{18}$$

Необходимость. Допустим, что решение (1)-го — целое неотрицательное, тогда $x^{(l_0+p)} = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, m;\ p = 1, 2, \ldots)$. Из (8) получаем $b_i^{(l_0+p)} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ p = 1, 2, \ldots)$.

Достаточность. Если учтем (18) и (2), из (10) получаем: $b_i^{(l_0+p)} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ p = 1, 2, \ldots)$ и так как система (8) вырожденная, имеем $x_j^{(l_0+p)} = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, m;\ p = 1, 2, \ldots)$; (11) или (12) дает: $x_j^{(0)}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ — целое неотрицательное.

Для вычисления удобна схема 1. Для расчетов используются формулы (10) и (17).

Схема 1

№№ п/п	x_1^0	x_2^0	...	x_m^0	$b^{(0)}$ $\bar{b}^{(0)}$	$b^{(2)}$ $\bar{b}^{(1)}$	...	$b^{(l_0)}$ $\bar{b}^{(l_0)}$	$b^{(l_0+1)}$ $\bar{b}^{(l+1)}$	$\{x_j^0\}$
1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1m}	$b_1^{(0)}$ $\bar{b}_1^{(0)}$	$b_1^{(1)}$ $\bar{b}_1^{(1)}$	...	$b_1^{(l_0)}$ $\bar{b}_1^{(l_0)}$	$b_1^{(l_0+2)}$ $\bar{b}_1^{(l_0+1)}$	$x_1^{(0)}$
2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2m}	$b_2^{(0)}$ $\bar{b}_2^{(0)}$	$b_2^{(1)}$ $\bar{b}_2^{(1)}$	...	$b_2^{(l_0)}$ $\bar{b}_2^{(l_0)}$	$b_2^{(l_0+2)}$ $\bar{b}_2^{(l_0+1)}$	$x_2^{(0)}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mm}	$b_m^{(0)}$ $\bar{b}_m^{(0)}$	$b_m^{(1)}$ $\bar{b}_m^{(1)}$	...	$b_m^{(l_0)}$ $\bar{b}_m^{(l_0)}$	$b_m^{(l_0+1)}$ $\bar{b}_m^{(l_0+1)}$	$x_m^{(0)}$

Оценка. В предложенном алгоритме число элементарных операций (определение четности или нечетности целого числа, сложение и вычитание, умножение на нуль или единицу, деление на два, сравнение числа, переход от двоичной к десятичной системе счисления) равно $m(\alpha + d) + 2m(l+1)(m+2)$, где α указывает, сколько раз было разделено уравнение на два при элементарных преобразованиях, d — число элементарных преобразований, l — максимальное число разрядов двоичного представления целого решения, m — число неизвестных, равное числу уравнений.

Если будем считать, что для одного умножения или деления требуется примерно $\alpha + d$ элементарных операций, тогда число умножений и делений в предложенном алгоритме будет не более m^2 порядка, а при решении систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса получается в m^2 раз больше умножений или делений.

2. РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЧАСТНОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Пусть имеем системы уравнений

$$\sum_{s=1}^{m_k} a_{kis} x_{ks} = b_{ki}^{(0)} \quad (i = 1, 2, \ldots, m_k;\ k = 1, 2, \ldots, t) \tag{19}$$

и линейные формы

$$\sum_{k=1}^{m_k} c_{ks} x_{ks} \qquad (k = 1, 2, \ldots, t), \tag{20}$$

где a_{kis}, $b_{ki}^{(0)}$, c_{ks} — данные целые числа и

$$\bar{a}_{kis} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = s, \\ 0, & \text{если } i \neq s. \end{cases}$$

Нужно из (19) выбрать систему, имеющую целочисленное неотрицательное решение, а среди линейных форм (20) такую, которая при этом решении достигает минимума, т. е. задача заключается в нахождении таких целых $x_{k_0 s} \geqslant 0$, если оно существует $(s = 1, 2, \ldots, m_{k_0})$, которые удовлетворяют условиям:

$$\sum_{s=1}^{m_{k_0}} a_{k_0 is} x_{k_0 s} = b_{k_0 i}^{(0)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m_{k_0}),$$

$$\min_{1 \leqslant k \leqslant t} \sum_{s=1}^{m_k} c_{ks} x_{ks} \sum_{s=1}^{m_{k_0}} c_{k_0 s} x_{k_0 s},$$

где $x_{ks} \geqslant 0$ — целое.

Выбираем c^1 так, чтобы

$$Z_k = \sum_{s=1}^{m_k} c_{ks} x_{ks} + c^1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, t) \tag{21}$$

были неотрицательными $(z_k \geqslant 0)$.

Из (19) и (21) получаем

$$\sum_{s=1}^{m_k} c_{ks}^{(0)} x_{ks} + z_k = c_k^{(0)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, t), \tag{22}$$

где

$$c_{ks}^{(0)} = -c_{ks} + \sum_{i=1}^{m_k} a_{kis} \bar{c}_{ki}, \qquad c_k^{(0)} = c^1 + \sum_{i=1}^{m_k} b_{ki} \bar{c}_{ki},$$

$$\bar{c}_{ks}^{(0)} = 0 \; (s = 1, 2, \ldots, m_k; \; k = 1, 2, \ldots, t).$$

Системы (19), (22) являются приведенными и нахождение их целочисленных неотрицательных решений (x_{ks}, z_k) начнем по схеме 1, где для выбора $z_{k_0} = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant t} z_k$ параллельно вычисляем и сравниваем каждую цифру разрядов значений линейной формы и $c_k^{(l)}$.

Если, начиная с некоторого номера l_{k_0}, окажется, что

$$b_{k_0 i}^{(l_{k_0}+1)} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \qquad c_{k_0}^{(l_{k_0}+1)} = 0,$$

$$a \sum_{i=1}^{m} \{[b_{k_i}^{(l_k)}]^2 + [c_k^{(l_k)}]^2\} \neq 0$$

при $l_k \leqslant l_{k_0}$ $(k = 1, 2, \ldots, t)$, тогда вычисление прекращается. Так как мы получили решение задачи, последнее определяется формулой:

$$x_{k_0 s} = \sum_{k=0}^{l_{k_0}} 2^k \bar{b}_{k_0 s}^{(k)}, \qquad z_{k_0} = \sum_{k=0}^{l_{k_0}} 2^k \bar{c}_{k_0}^{(k)}. \tag{23}$$

Оценка. При обычном решении этой задачи необходимо выполнение следующего: а) решение всех систем линейных алгебраических уравнений; б) выбора тех систем, которые имеют целые неотрицательные решения; в) вычисление соответствующих значений линейных форм и выбор среди них минимального.

Предложенный прием дает значительную экономию элементарных операций, так как одновременно начинаем нахождение целых неотрицательных решений всех данных систем линейных алгебраических уравнений. В ходе вычислений алгоритмически появляется та система, которая имеет целое неотрицательное решение, минимизирующее линейную форму.

Число элементарных операций в предложенном приеме зависит от значений l_{k_0} и не зависит от разности $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant t} c_k - \min\limits_{1\leqslant x\leqslant t} c_k$. Поэтому предложенный прием эффективен при больших значениях этой разности и малом $\min\limits_{1\leqslant k\leqslant t} c_k$.

Примечание 1. Если окажется, что необходимая информация для решения задачи (система в количестве t) не уменьшается в оперативной памяти машины, то рассматриваем системы отдельными блоками ($t_1, t_2, \ldots, t_r$ систем, где $t = \sum\limits_{i=1}^{r} t_i$) и начинаем их решение по предложенному приему. Может оказаться, что эти системы (t_1) не имеют целых неотрицательных решений и для того чтобы процесс вычисления не продолжался бесконечно, вводим оценку неизвестного. Например, $|x_{ks}| \leqslant A$. Если $\sum\limits_{i=1}^{m_k} [b_{ki}^{(l_k)}]^2 \neq 0$ для всех $k = 1, 2, \ldots, t_1$, а $2^{l_k} > A$, то эти системы (t_1) не имеют целого неотрицательного решения. Переходим к рассмотрению следующих (t_2) систем. Пусть для какого-нибудь номера l_{k_2}; $b_{k_2 i}^{(l_{k_2}+1)} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m_{k_2})$. Тогда k_2 — система, входящая в систему (t_2) — имеет целое численное неотрицательное решение и по формуле (23) можно вычислить соответствующую линейную форму $(z_{k_2}^{(0)})$. Рассмотрим следующие системы (t_3). Если $b_{k_3 i}^{(l_{k_3}+1)} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, $z_{k_3}^{(l_{k_3}+1)} = 0$ и $l_{k_3} \leqslant l_0$, то система k_3 имеет целочисленное неотрицательное решение и ее линейная форма $z_{k_3}^{(0)} \leqslant z_{k_2}^{(0)}$. Снова переходим к рассмотрению других систем и т. д.

Примечание 2. Рассмотрим общую задачу линейного целочисленного программирования, в которой оптимальная целочисленная точка ищется на краях выпуклого многогранника, а система невырожденная. Выпишем для отдельной точки определенную систему и соответствующую линейную форму. Для всех систем применяем предложенный выше прием. А для расчета используются формулы (10), (17), (23).

Следует заметить, что в этих случаях некоторые системы будут иметь одинаковые коэффициенты при неизвестных или свободных членах. Это облегчает решение предложенной выше задачи.

Например, найдем целочисленную точку на краях выпуклого многогранника, полученную из систем уравнений:

$$\sum_{s=1}^{m} a_{is} x_s + d_i y = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{24}$$

$$x_s \geqslant 0, \quad y \geqslant 0 \ (s = 1, 2, \ldots, m),$$

для которой

$$c = b - \sum_{s=1}^{m} a_s x_s - dy \to \min. \tag{25}$$

Схема 2

№ систем	Базис	x_1	x_2	...	x_m	v	$b^{(0)}$	$\bar{b}^{(0)}$	$b^{(1)}$	$\bar{b}^{(1)}$	...	$b^{(l)}$	$\bar{b}^{(l)}$	$b^{(l+1)}$	$\bar{b}^{(l+1)}$
0	x_{01}	a_{11}	a_{12}	...	a_{1m}	d_1	$b_{01}^{(0)}$	$\bar{b}_{01}^{(0)}$	$b_{01}^{(1)}$	$\bar{b}_{01}^{(1)}$		$b_{01}^{(l)}$	$\bar{b}_{01}^{(l)}$	$b_{01}^{(l+1)}$	$\bar{b}_{01}^{(l+1)}$
	x_{02}	a_{21}	a_{22}	...	a_{2m}	d_2	$b_{02}^{(0)}$	$\bar{b}_{02}^{(0)}$	$b_{02}^{(1)}$	$\bar{b}_{02}^{(1)}$		$b_{02}^{(l)}$	$\bar{b}_{02}^{(l)}$	$b_{02}^{(l+1)}$	$\bar{b}_{02}^{(l+1)}$
	. . .														
	x_{0m}	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mm}	d_m	$b_{0m}^{(0)}$	$\bar{b}_{0m}^{(0)}$	$b_{0m}^{(1)}$	$\bar{b}_{0m}^{(1)}$		$b_{0m}^{(l)}$	$\bar{b}_{0m}^{(l)}$	$b_{0m}^{(l+1)}$	$\bar{b}_{0m}^{(l+1)}$
	z^0	a_1	a_2	...	a_m	d $\bar{d}$	$b_0^{(0)}$	$\bar{b}_0^{(0)}$	$b_0^{(1)}$	$\bar{b}_0^{(1)}$		$b_0^{(l)}$	$\bar{b}_0^{(l)}$	$b_0^{(l+1)}$	$\bar{b}_0^{(l+1)}$
1	y_1						$b_{11}^{(0)}$	$\bar{b}_{11}^{(0)}$	$b_{11}^{(1)}$	$\bar{b}_{11}^{(1)}$		$b_{11}^{(l)}$	$\bar{b}_{11}^{(l)}$	$b_{11}^{(l+2)}$	$\bar{b}_{11}^{(l+1)}$
	x_{12}						$b_{12}^{(0)}$	$\overline{b_{12}^{(0)} - b_{11}^{(0)}}$	$b_{12}^{(1)}$	$\overline{b_{12}^{(1)} - b_{11}^{(1)}}$		$b_{12}^{(l)}$	$\overline{b_{12}^{(l)} - b_{11}^{(l)}}$	$b_{12}^{(l+1)}$	$\overline{b_{12}^{(l+1)} - b_{11}^{(l+1)}}$
	. . .														

Схема 2 (продолжение)

№ систем	Базис	x_1	x_2	...	x_m	y	$b^{(0)}$ $\overline{b}^{(0)}$	$b^{(1)}$ $\overline{b}^{(1)}$	...	$b^{(l)}$ $\overline{b}^{(l)}$	$b^{(l+1)}$ $\overline{b}^{(l+1)}$
	x_{1m}						$b^{(0)}_{1m}$ $\overline{b^{(0)}_{1m} - b^{(0)}_{11}}$	$b^{(1)}_{1m}$ $\overline{b^{(1)}_{1m} - b^{(1)}_{11}}$		$b^{(l)}_{1m}$ $\overline{b^{(l)}_{1m} - b^{(l)}_{11}}$	$b^{(l+1)}_{1m}$ $\overline{b^{(l+1)}_{1m} - b^{(l+1)}_{11}}$
	z_1						$b^{(0)}_{1}$ $\overline{b^{(0)}_{1} - db^{(0)}_{11}}$	$b^{(1)}_{1}$ $\overline{b^{(2)}_{1} - db^{(1)}_{11}}$		$b^{(l)}_{1}$ $\overline{b^{(l)}_{1} - db^{(l)}_{11}}$	$b^{(l+1)}_{1}$ $\overline{b^{(l+1)}_{1} - db^{(l+1)}_{11}}$
...	...										
m	x_{m1}						$b^{(0)}_{m1}$ $\overline{b^{(0)}_{m1} - b^{(0)}_{mm}}$	$b^{(1)}_{m1}$ $\overline{b^{(1)}_{m1} - b^{(1)}_{mm}}$		$b^{(l)}_{m1}$ $\overline{b^{(l)}_{m1} - b^{(l)}_{mm}}$	$b^{(l+1)}_{m1}$ $\overline{b^{(l+1)}_{m1} - b^{(l+1)}_{mm}}$
	...										
	x_{m1m1}						$b^{(0)}_{mm-1}$ $\overline{b^{(0)}_{mm-1} - b^{(0)}_{mm}}$	$b^{(1)}_{mm-1}$ $\overline{b^{(2)}_{mm-1} - b^{(1)}_{mm}}$		$b^{(l)}_{mm-1}$ $\overline{b^{(l)}_{mm-1} - b^{(l)}_{mm}}$	$b^{(l+1)}_{mm-1}$ $\overline{b^{(l+1)}_{mm-1} - b^{(l+1)}_{mm}}$
	y_m						$b^{(0)}_{mm}$ $\overline{b}^{(0)}_{mm}$	$b^{(1)}_{mm}$ $\overline{b}^{(1)}_{mm}$		$b^{(l)}_{mm}$ $\overline{b}^{(l)}_{mm}$	$\overline{b}^{(l+1)}_{mm}$
	z_m						$b^{(0)}_{m}$ $\overline{b^{(0)}_{m} - db^{(0)}_{mm}}$	$b^{(1)}_{m}$ $\overline{b^{(1)}_{m} - db^{(1)}_{mm}}$		$b^{(l)}_{m}$ $\overline{b^{(l)}_{m} - db^{(l)}_{mm}}$	$b^{(l+1)}_{m}$ $\overline{b^{(l+1)}_{m} - db^{(l+1)}_{mm}}$

Не нарушая общности, можем подразумевать, что

$$\bar{a}_{is} = \begin{cases} 1, \text{ если } & i = s, \\ 0, \text{ если } & i \neq s \quad (i, s = 1, 2, \ldots, m), \end{cases}$$

$$\bar{d}_i = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\bar{a}_s = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, m).$$

Представим задачу (24), (25) аналогично системам (19), (22) и для удобства запишем в виде:

$$\sum_{s=1}^{m} a_{is} x_{0s}^{(0)} = b_{0i}^{(0)} \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \quad \sum_{s=1}^{m} a_s x_{0s}^{(0)} + z_0^{(0)} = b_0^{(0)},$$

$$\sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^{m} a_{is} x_{ks}^{(0)} + d_i y_k^{(0)} = b_{ki}^{(0)} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^{m} a_s x_{ks}^{(0)} + d y^{(0)} + z_k^{(0)} = b_k^{(0)} \quad (k = 1, 2, \ldots, m), \tag{26}$$

где

$$b_{ki}^{(0)} = b_i, \quad \text{а} \quad b_k^{(0)} = b.$$

Ищем для целых $x_{ks}^{(0)} \geqslant 0$ и $y_k^{(0)} \geqslant 0$ такую z_{k0}, что $z_{k0} = \min\limits_{0 \leqslant k \leqslant m} z_k$.

Теперь обратимся к решению. Так как $\bar{a}_{ks} = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, m)$, $y_k^{(0)} = 2y_k^{(1)} + \bar{b}_{kk}^{(0)}$, то уравнение (26) можно представить в виде:

$$\sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^{m} a_{is} x_{ks}^{(0)} + 2 d_i y_k^{(1)} = b_{ki}^{(0)} - d_i \bar{b}_{kk}^{(0)}, \tag{27}$$

$$\sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^{m} a_s x_{ks}^{(0)} + 2 d y_k^{(1)} = b_k^{(0)} - d \bar{b}_{kk}^{(0)} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, m).$$

Отсюда:

$$x_{ks}^{(0)} = 2x_{ks}^{(1)} + b_{ks}^{(0)} - d_s b_{kk}^{(0)} = 2x_{ks}^{(1)} + \bar{b}_{ks}^{(0)} + (-1)^{\bar{b}_{ks}^{(0)}} \bar{b}_{kk}^{(0)}.$$

$$z_k^{(0)} = 2z_k^{(1)} + \overline{b_k^{(0)} - d b_{kk}^{(0)}} = 2z_k^{(1)} + \bar{b}_k^{(0)} + (-1)^{\bar{b}_k^{(0)}} \bar{b}_{kk}^{(0)},$$

так как $\overline{b_s \pm d b_h} = \bar{b}_s + (-1)^{\bar{b}_s} \bar{d} \bar{b}_h$.

Подстановка значений $x_{ks}^{(0)}$ в уравнения (27) дает:

$$\sum_{\substack{s=1\\ s\neq k}} a_{is}x_{ks}^{(1)} + d_i y^{(1)} = \frac{b_{ki}^{(0)} - \sum\limits_{s=1}^{m} a_{is} b_{ks}^{(0)}}{2} - \frac{d_i + \sum\limits_{s=1}^{m} a_{is} - (1)^{\bar b_{ks}^{(0)}}}{2}\,\bar b_{kk}^{(0)},$$

$$\sum_{\substack{s=1\\ s\neq k}}^{m} a_s x_{ks}^{(1)} + dy^{(1)} + z_k^{(1)} = \frac{b_k^{(0)} - \bar b_k^{(0)} + \sum\limits_{s=1}^{m} a_s \bar b_{ks}^{(0)}}{2} -$$

$$- \frac{\sum\limits_{s=1}^{m} a_s (-1)^{\bar b_{ks}^{(0)}} + (d + (-1)^{\bar b_k^{(0)}} \bar d)}{2}\,\bar b_{kk}^{(0)}$$

$$(i, k = 1, 2, \ldots, m)$$

или

$$\sum_{\substack{s=1\\ s\neq k}} a_{is}x_{ks}^{(1)} + d_i y_k^{(1)} = b_{ki}^{(1)},$$

$$\sum_{\substack{s=1\\ s\neq k}} a_s x_{ks}^{(1)} + dy^{(1)} + z_k^{(1)} = b_k^{(1)} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, m).$$

Снова представим $y_k^{(1)}$ и $x_{ks}^{(1)}$ и $z_k^{(1)}$ и так далее.
Справедливы формулы:

$$b_{ki}^{(l+1)} = \frac{b_{ki}^{(l)} - \sum\limits_{s=1}^{m} a_{is} \bar b_{ks}^{(l)}}{2} - \frac{d_i + \sum\limits_{s=1}^{m} a_{is} (-1)^{\bar b_{ks}^{(l)}}}{2}\,\bar b_{kk}^{(l)},$$

$$b_{ki}^{(l+1)} = \frac{b_k^{(l)} - \bar b_k^{(l)} + \sum\limits_{s=1}^{m} a_s \bar b_{ks}^{(l)}}{2} - \frac{\sum\limits_{s=1}^{m} a_s (-1)^{\bar b_{ks}^{(l)}} - (d + (-1)^{\bar b_k^{(l)}} d)}{2}\,\bar b_{kk}^{-(l)} \qquad (28)$$

$$(l = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$\bar y_k^{(0)} = \bar b_{kk}^{(l)}, \quad \bar x_{ks}^{(l)} = \overline{b_{ks}^{(0)} - d_s b_{kk}^{(l)}}, \quad \bar z_k^{(l)} = \overline{b_k^{(l)} - d b_{kk}^{(l)}}.$$

Для вычислений удобна схема 2.

Для проведения вычислений применяются формулы (10), (17), (23) и (28).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Люстерник. О вычислении значений функций одного переменного. «Математическое просвещение», 1958, вып. 3.
2. Д. Б. Юдин и Е. Г. Гольштейн. Линейное программирование. М., «Советское радио», 1963.

Поступила в редакцию
20 V 1965