ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1965 том I, вып. 5

НАУЧНЫЕ КОНСУЛЬТАЦИИ

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Б. С. ВЕРХОВСКИЙ

(МОСКВА)

Публикуемая консультация является логическим продолжением ранее напечатанной статьи *. Цель настоящей консультации — описать вычислительные методы, при помощи которых может быть найдено решение задачи линейного программирования.

Рассмотрим задачу линейного программирования, в которой все ограничения на неизвестные заданы в виде равенств: найти такие значения величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые удовлетворяют ограничениям

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{1}$$

и обращают в минимум выражение

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{2}$$

при условии неотрицательности величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, т. е. при

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0. \tag{3}$$

Задача (1) — (3) называется задачей линейного программирования в канонической форме.

Любая задача линейного программирования может быть записана в канонической форме путем введения дополнительных неизвестных. Покажем, как это сделать.

Пусть задана такая задача линейного программирования: найти

$$\min\,(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n) \tag{4}$$

при условиях

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\leqslant b_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ &\cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leqslant b_m \end{aligned} \tag{5}$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0. \tag{6}$$

Задача (4) — (6) отличается от задачи (1) — (3) лишь условиями (5), которые заданы в виде неравенств типа «не больше, чем ...». Эта задача может быть записана в канонической форме: найти

$$\min\,(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + 0\cdot x_{n+1} + 0\cdot x_{n+2} + \ldots + 0\cdot x_{n+m}) \tag{4'}$$

---

* См. в № 4, 1965 г. нашего журнала статью Б. С. Верховского «Постановка и интерпретация задач линейного программирования».

при условиях

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + 1\cdot x_{n+1} + 0\cdot x_{n+2} + \ldots + 0\cdot x_{n+m} = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + 0\cdot x_{n+1} + 1\cdot x_{n+2} + \ldots + 0\cdot x_{n+m} = b_2. \quad (5')$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + 0\cdot x_{n+1} + 0\cdot x_{n+} + \ldots + 1\cdot x_{n+m} = b_m,$$
$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ \ldots,\ x_n \geqslant 0,\ x_{n+1} \geqslant 0,\ x_{n+2} \geqslant 0,\ \ldots,\ x_{n+m} \geqslant 0. \quad (6')$$

Задача (4′) — (6′) обладает следующим свойством: значения первых n неизвестных ее оптимального плана составляют оптимальный план задачи (4) — (6), т. е. задачи (4) — (6) и (4′) — (6′) эквивалентны.

Подобным же образом к канонической форме приводится задача, в которой ограничения на неизвестные задаются в виде неравенств «не меньше, чем...». В этом случае каждое ограничение обращается в равенство за счет введения дополнительных неизвестных $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$, причем в i-е ограничение канонической задачи переменных x_{n+i} входит с коэффициентом -1, а остальные дополнительные неизвестные входят с нулевыми коэффициентами.

Может быть задана и другая задача линейного программирования: найти

$$\max\,(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n) \quad (7)$$

при условиях

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leqslant b_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leqslant b_m,$$
$$x_1 \geqslant d_1,\quad x_2 \geqslant d_2,\ \ldots,\ x_n \geqslant d_n. \quad (9)$$

Покажем, как привести ее к канонической форме.

Введем новые неизвестные

$$y_1 = x_1 - d_1,\quad y_2 = x_2 - d_2,\ \ldots,\ y_n = x_n - d_n.$$

Теперь

$$y_1 \geqslant 0,\quad y_2 \geqslant 0,\ \ldots,\ y_n \geqslant 0.$$

Подставим значения $x_1 = y_1 + d_1$, $x_2 = y_2 + d_2$, $\ldots$, $x_n = y_n + d_n$ в критерий задачи (7) и в ограничения (8):

$$\max\,(c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n) + (c_1d_1 + c_2d_2 + \ldots + \bar{c}_nd_n). \quad (7')$$
$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \leqslant b_1'$$
$$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \leqslant b_2'$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \leqslant b_m' \quad (9')$$
$$y_1 \geqslant 0,\quad y_2 \geqslant 0,\ \ldots,\ y_n \geqslant 0,$$

где

$$b_1' = b_1 - (a_{11}d_1 + a_{12}d_2 + \ldots + a_{1n}d_n)$$
$$b_2' = b_2 - (a_{21}d_1 + a_{22}d_2 + \ldots + a_{2n}d_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$b_m' = b_m - (a_{m1}d_1 + a_{m2}d_2 + \ldots + a_{mn}d_n).$$

Далее

$$\max\,(c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n) = \\ = -\min\,(-c_1y_1 - c_2y_2 - \ldots - c_ny_n).$$

Таким образом, вместо максимума одной линейной функции можно находить минимум другой линейной функции.

Теперь рассмотрим задачу: найти

$$\min\,(-c_1y_1 - c_2y_2 - \ldots - c_ny_n - 0\cdot y_{n+1} - 0\cdot y_{n+2} - \ldots - 0\cdot y_{n+m})$$

при условиях

$$\begin{gathered} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + 1\cdot y_{n+1} + 0\cdot y_{n+2} + \ldots + 0\cdot y_{n+m} = b_1', \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + 0\cdot y_{n+1} + 1\cdot y_{n+2} + \ldots + 0\cdot y_{n+m} = b_2' \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n + 0\cdot y_{n+1} + 0\cdot y_{n+2} + \ldots + 1\cdot y_{n+m} = b'_m \\ y_1 \geqslant 0, \quad y_2 \geqslant 0, \; \ldots, \; y_n \geqslant 0, \; y_{n+1} \geqslant 0, \; \ldots, \; y_{n+m} \geqslant 0. \end{gathered}$$

Пусть $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}, \ldots, y_{n+m}^{(0)}$ ее оптимальный план, а значение критерия, соответствующее оптимальному плану, равно K. Тогда решение $x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ задачи (7) — (9) определяется как $x_1^{(0)} = y_1^{(0)} + d_1$, $x_2^{(0)} = y_2^{(0)} + d_2, \ldots, x_n^{(0)} = y_n^{(0)} + d_n$, а максимальное значение критерия (7) равно

$$-K + (c_1d_1 + c_2d_2 + \ldots + c_nd_n).$$

Чтобы отыскать оптимальный план (решение) задачи (1) — (3), можно воспользоваться следующим методом:

а) найти произвольный опорный план задачи;

б) переходить от одного опорного плана к другому, заведомо лучшему, пока таковые будут существовать.

Такой метод поиска оптимального плана получил в отечественной литературе название метода последовательного улучшения плана. Американские математики дали ему название «симплекс-метод». Применяя симплекс-метод для решения задачи (1) — (3), процесс поиска оптимума организуют в два этапа. На первом этапе решают вспомогательную задачу: найти

$$\min\,(x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+m}) \tag{10}$$

при условиях

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + 1\cdot x_{n+1} + 0\cdot x_{n+2} + \ldots + 0\cdot x_{n+m} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + 0\cdot x_{n+1} + 1\cdot x_{n+2} + \ldots + 0\cdot x_{n+m} = b_2, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + 0\cdot x_{n+1} + 0\cdot x_{n+2} + \ldots + 1\cdot x_{n+m} = b_m, \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \; \ldots, \; x_n \geqslant 0, \; x_{n+1} \geqslant 0, \; \ldots, \; x_{n+m} \geqslant 0. \end{gathered} \tag{11}$$

Если в оптимальный план задачи (10), (11) входит по крайней мере одна из переменных $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ с положительным значением, то задача (1) — (3) не имеет планов. Это означает, что математическая модель (1) — (3) при условии, что она правильно составлена, описывает процесс, в ограничениях которого есть внутренние противоречия.

Если же в оптимальном плане вспомогательной задачи переменные $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ равны нулю, то первые n компонент этого плана являются опорным планом задачи (1) — (3).

На втором этапе решают собственно задачу (1) — (3), последовательно улучшая ее опорные планы.

При этом исходный опорный план вспомогательной задачи очевиден:

$$x_{n+1} = b_1, \quad x_{n+2} = b_2, \ \ldots, \ x_{n+m} = b_m. \tag{12}$$

(Условия неотрицательности переменных удовлетворяются, поскольку все $b_1, b_2, \ldots, b_m$ — заданные неотрицательные числа.)

Опорному плану (12) соответствует значение критерия (10), равное $b_1 + b_2 + \ldots + b_m$.

Для удобства вычислений по симплекс-методу вся исходная информация, т. е. все данные задачи линейного программирования, решение которой требуется найти, записываются в специальную таблицу. Таблица эта называется симплексной таблицей. Она имеет следующий вид:

Таблица 1

N	C	X	0	0	...	0	...	0	1	1	...	1	1
$n+1$	1	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}	1	0	...	0	0
$n+2$	1	b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}	0	1	...	0	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$n+i$	1	b_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}	0	0	...	0	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$n+m$	1	b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}	0	0	...	0	1
		$b^{(1)}$	$a^{(1)}$	$a^{(2)}$	...	$a^{(1)}$	...	$a^{(n)}$	0	0	...	0	0

Размер таблицы: $m + 2$ строк и $n + m + 3$ столбцов.

В начале вычислений таблица заполняется следующим образом:

1) В столбце N записываются номера переменных, входящих в первый опорный план, т. е. числа $n + 1, \ \ldots, \ n + m$.

2) В столбце C записываются коэффициенты линейной формы (10) при переменных, входящих в первый опорный план, т. е. подряд m единиц.

3) В первых m клетках столбца X записываются числовые значения переменных $x_{n+1}, x_{n+2}, \ \ldots, x_{n+m}$ — базисных переменных исходного опорного плана, т. е. числа $b_1, b_2, \ \ldots, \ b_m$.

4) В $(m + 1)$-й клетке столбца X записывается значение критерия задачи (10) — (11), соответствующее первому опорному плану, т. е. число $b^{(1)} = b_1 + b_2 + \ldots + b_m$. В последующих $n + m$ клетках $(m + 1)$-й строки записываются числа $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(n+m)}$, где

$$\begin{aligned} a^{(1)} &= a_{11} + a_{21} + \ldots + a_{m1}, \\ a^{(2)} &= a_{12} + a_{22} + \ldots + a_{m2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a^{(n)} &= a_{1n} + a_{2n} + \ldots a_{mn}, \\ a^{(n+1)} &= \ldots = a^{(n+m)} = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

(Будем впредь именовать эту строку строкой оценок столбцов, а числа, стоящие в ней, будем называть оценками столбцов.)

5) В самую верхнюю строку симплекс-таблицы (эту строку мы будем называть нулевой) записываются коэффициенты, стоящие при неизвестных $x_1, \ \ldots, \ x_{n+m}$ в критерии задачи (10), т. е. подряд n нулей и m единиц. Эта единственная строка таблицы, которая в процессе вычислений изменяется лишь один раз при переходе от первого ко второму этапу поиска решения.

6) В незаполненной пока еще части симплексной таблицы (ее мы впредь будем называть центральной частью симплексной таблицы) записываются коэффициенты, стоящие при неизвестных в ограничениях (11): в первую строку записываются подряд коэффициенты первого уравнения, стоящие при неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_{n+m}$, т. е. числа $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$, $1, 0, \ldots, 0$, во вторую строку — коэффициенты второго уравнения и т. д., в последнюю (m-ю) строку — числа $a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m-1}, 1$.

Пусть требуется решить задачу линейного программирования, заданную в канонической форме: найти

$$\min\,(2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4) \tag{14}$$

при условиях

$$\begin{gathered} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 7, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2; \end{gathered} \tag{15}$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0, \quad x_4 \geqslant 0. \tag{16}$$

Прежде всего введем дополнительные переменные x_5, x_6, x_7 и рассмотрим вспомогательную задачу: найти

$$\min\,(0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + x_5 + x_6 + x_7) \tag{14'}$$

при условиях

$$\begin{gathered} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 1 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 = 7, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 0 \cdot x_5 + 1 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 1 \cdot x_7 = 2, \end{gathered} \tag{15'}$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \ \ldots, \ x_7 \geqslant 0. \tag{16'}$$

Запишем все данные задачи (14′)—(16′) в начальную симплексную таблицу (см. табл. 2).

Прежде чем перейти к обсуждению вопроса о том, как преобразовывать симплекс-таблицу, определим некоторые правила действия со столбцами.

Столбец, состоящий из m чисел, будем называть столбцом размерности m.

Столбец $\bar{S}$ любой размерности можно умножить на произвольное число α.

В результате получим столбец $\alpha\bar{S} = \begin{pmatrix} \alpha S_1 \\ \alpha S_2 \\ \cdots\cdot \\ \alpha S_m \end{pmatrix}$.

Два столбца $\bar{S}$ и $\bar{P}$ одинаковой размерности m можно складывать или вычитать один из другого, причем

$$\bar{S} \pm \bar{P} = \begin{pmatrix} S_1 \pm P_1 \\ \vdots \\ S_m \pm P_m \end{pmatrix},$$

где

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_m \end{pmatrix}, \quad \bar{P} = \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_m \end{pmatrix}.$$

Два столбца $\bar{S}$ и $\bar{P}$ можно скалярно перемножить. В результате получим следующее число:

$$\bar{S} \cdot \bar{P} = S_1P_1 + S_2P_2 + \ldots + S_mP_m.$$

Примеры:

$$\overline{S}=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix},\quad \overline{P}=\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix},\ 2\cdot\overline{S}=\begin{pmatrix}2\\6\\4\end{pmatrix},\quad \overline{S}+\overline{P}=\begin{pmatrix}1+2\\3+4\\2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\7\\3\end{pmatrix},$$

$$\overline{S}-\overline{P}=\begin{pmatrix}1-2\\3-4\\2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad \overline{S}\cdot\overline{P}=1\cdot2+3\cdot4+2\cdot1=16.$$

Опишем правила преобразования симплекс-таблицы на конкретном примере (см. табл. 2).

Таблица 2

				1	2	3	4	5	6	7
	N	C	X	0	0	0	0	1	1	1
	5	1	7	1	2	1	3	1	0	0
	6	1	6	3	—1	2	2	0	1	0
←	7	1	2	—1	2	—1	2	0	0	1
			15	3	3	2	7	0	0	0
							↑			

1. Смотрим, есть ли в строке оценок хотя бы одна положительная оценка. Если их несколько, то выбираем наибольшую (в данном случае она равна 7) и ставим под ней стрелку. Столбец 4 — направляющий столбец (переменная x_4 становится базисной).

2. Делим элементы столбца X на соответствующие положительные элементы направляющего столбца и находим наименьшее положительное число:

$$\min\left(\frac{7}{3},\ \frac{6}{2},\ \frac{2}{2}\right)=\frac{2}{2}=1.$$

Это минимальное отношение определяет направляющую строку. В данном случае направляющей является третья строка. Ставим слева от нее стрелку (переменная x_7 перестает быть базисной).

3. В первую клетку направляющей строки записываем (см. табл. 3) число 4 вместо 7, т. е. номер направляющего столбца а во вторую клетку записываем 0.

Таблица 3

				1	2	3	4	5	6
	N	C	X	0	0	0	0	1	0
	5	1	4	$^5/_2$	—1	$^5/_2$	0	1	0
←	6	1	4	4	—3	3	0	0	1
	4	0	1	$-^1/_2$	1	$-^1/_2$	1	0	0
			8	$^{13}/_2$	—4	$^{11}/_2$	0	0	0
				↑					

Таблица 4

				1	2	3	4	5
	N	C	X	0	0	0	0	1
←	5	1	$^3/_2$	0	$^7/_8$	$^5/_8$	0	1
	1	0	1	1	$-^3/_4$	$^3/_4$	0	0
	4	0	$^3/_2$	0	$^5/_8$	$-^1/_8$	1	0
			$^3/_2$	0	$^7/_8$	$^5/_8$	0	0
					↓			

вместо 1, т. е. коэффициент при x_4 в линейной форме задачи $(14')-(16')$. В последующих вычислениях столбец 7 не рассматривается. Вообще, если в процессе решения одна из дополнительных переменных перестает быть базисной, то соответствующий столбец в дальнейшем не рассматривается.

4. На пересечении направляющей строки и направляющего столбца находится генеральный элемент 2. Поделим на него все элементы направляющей строки, начиная с клетки, лежащей в столбце X. Направляющая строка полностью преобразована.

5. Остальные элементы новой таблицы находятся по столбцам по следующему правилу:

$$\begin{pmatrix}\text{элементы}\\ \text{нового}\\ \text{столбца}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{элементы}\\ \text{старого}\\ \text{столбца}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{направляющий}\\ \text{элемент}\\ \text{преобразуемого}\\ \text{столбца}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{элементы}\\ \text{направляющего}\\ \text{столбца}\end{pmatrix}$$

Такая форма преобразования представляется нам наиболее удобной при ручном счете.

Направляющий элемент преобразуемого столбца лежит на пересечении этого столбца и преобразованной направляющей строки.

В качестве примера рассмотрим, как вычисляются все элементы, кроме третьего, нового столбца X:

$$\begin{pmatrix}7\\6\\15\end{pmatrix}-\frac{2}{2}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\8\end{pmatrix};$$

столбца 1:

$$\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}-\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/2\\4\\13/2\end{pmatrix}.$$

Все элементы остальных столбцов, не лежащие в направляющей строке, преобразуются аналогично.

В табл. 3 записаны результаты преобразования симплексной табл. 2. Процедуру перехода от одной симплексной таблицы к другой называют итерацией.

Каков же геометрический смысл производимых преобразований? Наличие положительных оценок указывает на то, что вершина многогранника условий задачи $(14')-(16')$, определяемая координатами $(0, 0, 0, 0, 7, 6, 2)$, имеет соседние с ней вершины, расположенные ближе к оптимуму, чем она. Действительно, в результате преобразования симплексной табл. 2 получаем новый опорный план с базисными компонентами $x_5 = 4$, $x_6 = 4$, $x_4 = 1$ (см. столбец X табл. 3), при котором значение критерия равно 8. Предыдущему опорному плану (с базисными компонентами $x_5 = 7$, $x_6 = 6$, $x_7 = 2$) соответствует значение линейной формы, равное 15. Табл. 2 преобразуется по тому же набору правил, что и табл. 1. Так, в результате преобразования табл. 2 получим новый опорный план задачи $(14')-(16')$ (с базисными компонентами $x_5 = 3/2$, $x_1 = 1$, $x_4 = 3/2$), при котором значение критерия равно $(3/2)$. Иначе, находим вершину многогранника условий задачи $(14')-(16')$ с координатами $(1, 0, 0, 3/2, 3/2, 0, 0)$, которая ближе к оптимуму, чем соседняя с ней вершина $(0, 0, 0, 1, 4, 4, 0)$.

В результате таких преобразований таблиц придем к случаю, когда в строке оценок нет положительных чисел. Это и есть условие, означающее, что найден оптимальный план задачи $(14')-(16')$.

Здесь возможна одна из двух ситуаций:

1) в последней клетке столбца X стоит положительное число. Это означает, что исходная задача (14) — (16) не имеет планов. В этом случае оптимальный план задачи (14′) — (16′) имеет в качестве базисной по крайней мере одну из переменных x_5, x_6, x_7;

2) в последней клетке столбца X стоит нуль. В этом случае оптимальный опорный план задачи (14′) — (16′) может быть взят в качестве исходного опорного плана задачи (14) — (16).

При переходе от табл. 4 к табл. 5 находим оптимальный план задачи (14′) — (16′), при котором значение критерия равно нулю. В число базисных переменных решения не входит ни одна из переменных x_5, x_6, x_7. После этого переходим ко второму этапу поиска решения. Найденное решение с базисными переменными $x_2 = {}^{12}/_7$, $x_1 = {}^{16}/_7$, $x_4 = {}^{3}/_7$ примем в качестве исходного опорного плана задачи (14) — (16).

В этом случае необходимо изменить записи во всех клетках нулевой и последней строки и в столбце C.

В нулевую строку запишем коэффициенты при неизвестных в критерии (14), т. е. числа 2, 3, 1, 4. В столбец C записываем коэффициенты при базисных переменных, т. е. числа 3, 2, 4. В последнюю клетку столбца X записываем число, равное скалярному произведению столбца C на столбец X:

$$3\cdot\frac{12}{7}+2\cdot\left(-\frac{16}{7}\right)+4\cdot\frac{3}{7}=\frac{80}{7}.$$

В остальные клетки последней строки записываем новые оценки столбцов.

Для того чтобы найти новую оценку столбца, необходимо скалярно перемножить этот столбец и столбец C и из результата вычесть число, стоящее над этим столбцом в нулевой строке таблицы. Оценки столбцов 1, 2, 4 равны нулям. Оценка столбца 3 равна:

$$3\cdot\frac{5}{7}+2\cdot\frac{9}{7}+4\cdot\left(-\frac{4}{7}\right)-1=\frac{10}{7}.$$

После того как вычислены все новые оценки, приступаем к последовательному улучшению опорного плана самой задачи (14) — (16).

При переходе от табл. 5 к табл. 6 получаем решение задачи (14) — (16) (с базисными переменными $x_2 = {}^{4}/_9$; $x_3 = {}^{16}/_9$; $x_4 = {}^{13}/_9$). Минимальное значение критерия при этом равно ${}^{80}/_9$.

Мы описали лишь один метод решения задачи линейного программирования — метод последовательного улучшения плана, получивший наибольшее распространение. Все указанные правила записи и преобразова-

Таблица 5

	N	C	X	2	3	1	4
				1	2	3	4
	2	3	${}^{12}/_7$	0	1	${}^{5}/_7$	0
←	1	2	${}^{16}/_7$	1	0	${}^{9}/_7$	0
	4	4	${}^{3}/_7$	0	0	$-{}^{4}/_7$	1
			${}^{80}/_7$	0	0	${}^{10}/_7$	0
						↑	

Таблица 6

N	C	X	2	3	1	4
			1	2	3	4
2	3	${}^{4}/_9$	$-{}^{5}/_9$	1	0	0
3	1	${}^{16}/_9$	${}^{7}/_9$	0	1	0
4	4	${}^{13}/_9$	${}^{4}/_9$	0	0	1
		${}^{80}/_9$	$-{}^{10}/_9$	0	0	0

ния симплексных таблиц справедливы для произвольной задачи. Естественно, мы не останавливались на некоторых тонкостях, таких, например, как вырожденность.

При решении некоторых задач применяют модифицированный симплекс-метод, являющийся видоизменением метода последовательного улучшения решения. Этот метод более эффективен с вычислительной точки зрения (требует меньшего объема вычислений), чем простой симплекс-метод, когда число неизвестных задачи превышает число ее ограничений более, чем в три раза. Кроме того, он удобнее описанного выше метода с точки зрения машинной реализации.

В числе других методов решения задач линейного программирования следует указать такие, как метод последовательного уточнения оценок, метод последовательного сокращения невязок.

Все перечисленные методы являются конечными, ибо за конечное число вычислений приводят к точному решению задачи либо устанавливают, что задача не имеет решения. К другой группе методов относятся бесконечные методы, которые позволяют за конечное число вычислений получить лишь приближенное решение, отличающееся от точного как угодно мало.

Таким образом, теоретически методика решения задач линейного программирования в постановке (1) — (3) полностью разработана. С практической же точки зрения, дело обстоит далеко не так. Реальные задачи линейного программирования, как правило, имеют большое число переменных и ограничений. А это требует для их решения по любому из указанных выше методов большого объема вычислений.

Однако в некоторых задачах линейного программирования удается использовать специфику их ограничений и тем самым уменьшить требуемый объем вычислений, применяя для их решения специальные методы. К таким специальным методам относятся, например, методы решения задач о назначении, транспортных задач и распределительных задач. Кроме того, дополнительные трудности при решении задач линейного программирования возникают тогда, когда накладывается требование целочисленности на все или на часть переменных. Решением такого рода задач занимается целочисленное программирование. Некоторые из этих методов будут описаны в следующих номерах нашего журнала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн. Задачи и методы линейного программирования. М., «Сов. радио», 1964.
2. Методы решения общей задачи линейного программирования. Под ред. В. С. Немчинова и др., М., Госстатиздат, 1963.
3. Я. Габр. Линейное программирование. М., Госстатиздат, 1960.
4. С. Гасс. Линейное программирование. М., Физматгиз, 1960.

Поступила в редакцию
15 VI 1965