

математического программирования», посвящена постановке задач, решаемых при помощи методов теории массового обслуживания, методов статистических испытаний (Монте-Карло), корреляционного анализа, многофакторного анализа и т. п. Объяснение методов решения этих задач отсутствует, в каждом отдельном случае дается ссылка на соответствующую литературу. Эта глава, полезная сама по себе, «не вписывается» в общую структуру книги и была бы хороша в качестве приложения.

Книге А. Вайоньи предпослана вступительная статья А. Я. Боярского, где автор излагает основные мысли своего доклада на совещании, созванном в июле 1959 г. редакцией журнала «Вестник статистики»*. Не касаясь существа затронутых вопросов, необходимо сказать, что уместность такого рода вступительной статьи к книге, носящей популярный характер, кажется нам по меньшей мере спорной. Кроме того, создается впечатление, что А. Я. Боярский поверхностно ознакомился с книгой Вайоньи, в результате чего во вступлении имеется ряд замечаний, которые могут вызвать у читателя недоумение. В частности, дважды ошибочно упоминается отсутствующее в последних главах книги описание итальянского опыта применения математики в производстве. Утверждение о том, что в главах 2—9 содержится «еще одно изложение основ линейного программирования» также не соответствует действительности: в этой части книги рассматривается гораздо более широкий круг вопросов.

Переводчики книги В. В. Головинский и Е. М. Четыркин проделали большую и полезную работу. Заслуживает упрека лишь явно ощущаемый недостаток технологических знаний в отдельных областях. Такие термины, как «дизельная нефть» (стр. 89) или «первичная смола» (когда речь идет о гудроне — стр. 74) и некоторые другие, будут встречены специалистами как ошибочные.

В целом книга А. Вайоньи, несмотря на некоторые имеющиеся в ней недостатки, представляет несомненный интерес и будет способствовать дальнейшей популяризации применения математических методов в экономических исследованиях.

Б. Суворов

Э. Хеди, Д. Диллон. «Производственные функции в сельском хозяйстве». Пер. с английского под ред. Е. М. Четыркина. М., «Прогресс», 1965

Книга Хеди и Диллона является первой переведенной на русский язык работой, которая детально знакомит советских экономистов с широко используемым за рубежом аппаратом производственных функций. В советской экономике изучались и использовались отдельные функциональные зависимости, существующие в производстве, в особенности функции зависимости себестоимости от мощности предприятия или выпуска продукции и функции зависимости капиталовложений от мощности предприятия. Однако производственные функции выпуска продукции, наиболее известные за рубежом, стали встречаться в нашей литературе лишь в последние два-три года, причем читателям было трудно составить о них полное представление.

Логичность изложения материала и доступность используемого математического аппарата делают книгу Хеди и Диллона полезным учебным пособием для каждого экономиста, желающего ознакомиться с вопросами построения и использования производственных функций выпуска. Книга по существу состоит из двух частей: в первой части (1—7 главы) рассматриваются общие проблемы построения и использования производственных функций; во второй (8—17 главы) — конкретные функции, построенные на основании данных по различным участкам сельского хозяйства США, некоторые дополнительные характеристики, связанные с этими функциями (изокванты, изоклинали, предельные нормы заменяемости), а также результаты оптимальных расчетов на основе производственных функций. Работа в целом носит практический характер.

Книга начинается с исторического обзора исследований о производственных функциях (1 глава). Отдельно рассматривается развитие агротехнических и отраслевых производственных функций (типа Кобба-Дугласа). К сожалению, обзор заканчивается периодом второй мировой войны, хотя в последующий период появилось много интересных работ, в особенности в области отраслевых производственных функций.

Вторая глава посвящена вопросам применения производственных функций в экономике и служит для обоснования необходимости их изучения. В использовании

* О применении математики в экономических исследованиях и об отношении к эконометрике. М., Госстатиздат, 1959.

функций авторы выделяют два основных направления: 1) получение на основе функций дополнительных характеристик производства, 2) оптимальные расчеты на основе функций.

Величины, получаемые на основе функций выпуска, могут служить средством экономического анализа и применяться при выборе решения. Широко используемые во второй части книги изокванты, изоклинали и производственные поверхности имеют ясный экономический смысл и могут быть графически изображены для функции выпуска с двумя видами затрат; это в значительной степени объясняет тот факт, что в дальнейшем авторы в основном и ограничиваются такими функциями. Уравнения изоквант (линий одинакового уровня выпуска при различных комбинациях затрат) авторы получают из уравнений производственных функций путем выражения затрат одного ресурса как функции уровня выпуска и величины затрат другого ресурса; на основе норм замещения предлагается способ вывода уравнения изоклиналей (линий, соединяющих на изоквантах точки с равным углом наклона и, следовательно, с равными предельными нормами замещения ресурсов). Производная функции выпуска и коэффициенты эластичности выпуска по ресурсам рассматриваются, прежде всего, как величины, непосредственно связанные с экономическими комбинациями использования ресурсов и оптимальными размерами производства. Производственные поверхности и кривые затрат-выпуска используются как вспомогательные графические средства, позволяющие наглядно представить функцию.

Изложение вопросов оптимизации на основе функций выпуска ведется от простых задач к сложным.

Среди задач с одним переменным ресурсом наибольший интерес представляет задача распределения ограниченного ресурса между конкурирующими видами производства с максимизацией получаемой прибыли. Авторы предлагают два способа решения подобных задач. В первом случае на основании условия равенства дополнительного стоимостного продукта для всех видов производства и ограничения по ресурсу составляется и решается система линейных уравнений. Во втором случае выпуск одного вида продукции выражается как функция выпуска другого продукта при фиксированном количестве ресурса. Из этого уравнения выводится уравнение предельной нормы замещения продуктов и затем на основании условия $dY_1/dY_2 = -P_2/P_1$ (где P_1 и P_2 — цены соответствующих продуктов) находится решение задачи. Необходимо отметить, что изложенные методы решения могут использоваться лишь для производственных функций определенного вида.

В случае использования n ресурсов, если нет ограничения на капитал, максимальную прибыль можно получить, если дополнительные продукты n ресурсов соответственно равны их ценам, деленным на цены выпуска. Решение задачи с ограничением на капитал находится при помощи множителей Лагранжа. Так, в случае производства m продуктов и использования n ресурсов функция прибыли имеет вид

$$\pi = \sum_{j=1}^m P_{vj} Y_j - \sum_{i=1}^n P_{ij} X_{ij} + \lambda \left(\sum_{i=1}^n P_{ij} X_{ij} - C \right).$$

Здесь P_{vj} — цена j -го продукта; Y_j , P_{ij} — цена i -го ресурса, X_{ij} , используемого при производстве j -го продукта; λ — множитель Лагранжа, а C — располагаемая величина капитала. Необходимым условием получения максимальной прибыли является $\partial \pi / \partial X_{ij} = 0$. Величины X_{ij} можно найти, решив полученные $mn + 1$ дифференциальных уравнений.

Хеди и Диллон рассматривают задачи максимизации прибыли арендатора, минимизации издержек в случае использования n ресурсов, а также ряд величин, используемых для принятия решения и анализа хозяйственной деятельности — кривые издержек, долгосрочные функции издержек, статичные функции сбыта и спроса на ресурсы.

Следует отметить, что хотя задачи излагаются применительно к условиям свободного рынка, цены во всех случаях являются известной величиной. С точки зрения авторов, производственные функции представляют один поток информации, необходимой для принятия решения, а данные о ценах и других величинах, выступающих в роли экономического критерия, представляют другой необходимый поток.

Почти все рассмотренные задачи носят узкий характер и служат для принятия решения на небольшом производственном участке (ферма). Задача в разрезе сельского хозяйства в целом изложена для слаборазвитой страны и неявно предполагает планируемое развитие сельского хозяйства.

Все функции в зависимости от степени точности, с которой они отражают реальную действительность, авторы разделяют на две части. «Если полностью известна логика производства, правильно установлена математическая форма взаимосвязи

зей и имеются данные, относящиеся к части производственной поверхности, то по этим данным при помощи выравнивания можно получить «логическую» функцию. Затем полученную функцию можно было бы использовать для расчета или прогнозирования всей поверхности. Но если логика производства известна не полностью, то можно получить лишь «статистическую» функцию. Ее можно использовать главным образом для прогнозирования при наличии определенных данных. Здесь она служит аппроксимацией основной структуры изучаемого процесса» (стр. 91). Подобное деление можно, конечно, отнести не только к функциям выпуска, но и ко всем функциональным зависимостям, существующим в производстве. При использовании функций в анализе и планировании нельзя забывать, что «статистическая» функция не может дать нам представления о форме связи в тех случаях, когда значение аргументов выходит за рамки исследованной совокупности. Построение функций, основанных на изучении технико-экономических показателей и логики производства, особенно важно для планирования производства. Серьезной проблемой здесь является выбор формы функции, который, с одной стороны, ограничен степенью точности отражения процесса производства, с другой стороны, — простотой расчетов.

Авторы предлагают использовать ту или иную форму функции в зависимости от того, насколько она соответствует нашим представлениям о производстве и какие черты производства нас интересуют. Степенную функцию вида $Y = aX_1^{b_1}X_2^{b_2}$ (для двух ресурсов) предлагается применять в том случае, если нас прежде всего интересует производительность ресурсов при средних затратах. В том случае, если есть основания считать, что постоянная эластичность не характерна для производства, причем коэффициенты эластичности представляют для нас интерес, использовать степенную функцию не рекомендуется.

Помимо функции Кобба-Дугласа, детально рассмотрен ряд других функций, используемых в основном для расчетов по сельскому хозяйству: функция Спиллмана вида $Y = M - AR^*$, формула сопротивления, квадратичные функции, ряд функций, допускающих одновременно как возрастающую, так и падающую предельную производительность ресурсов, и изучены условия их использования.

Значительное место в книге отведено вопросам построения функций. Процесс выравнивания данных для получения функций состоит из двух этапов: во-первых, сбор данных, во-вторых, их анализ. Авторы начинают с обзора статистических методов и проблем вычисления производственных функций.

Большую роль авторы отводят данным, полученным на основе эксперимента. Несомненно, экспериментальные данные имеют существенное преимущество по сравнению со статистическими. Экспериментатор может сам решить, какие величины должны быть постоянными и какие переменными, какими должны быть уровни воздействия переменных величин и комбинации этих уравнений. При эксперименте можно добиться устранения существенных ошибок наблюдения из информации, относящейся к затратам. Но значение, придаваемое авторами эксперименту, объясняется в основном условиями отрасли, которую они исследовали. Совершенно очевидно, что в промышленности роль эксперимента при построении функций будет гораздо скромнее, а скорее всего сведется к нулю.

Неэкспериментальные данные, так же как и экспериментальные, можно разделить на два вида: данные временных рядов и данные перекрестного обследования. Как временные ряды, так и данные перекрестного обследования содержат в себе влияние технического прогресса, отражающегося на качестве факторов производства. Хеди и Диллон предлагают для измерения технологических изменений метод Солоу*. Этот метод основывается на использовании данных временных рядов и применим для данных перекрестного обследования, включающих предприятия с разным уровнем технического развития. В целом вопрос учета технического прогресса в производственных функциях не решен до конца и требует дальнейшей разработки.

Вторая часть книги представляет интерес не только для экономистов, но и для любого специалиста сельского хозяйства. Здесь излагаются результаты экспериментов, проведенных Хеди и его сотрудниками в различных отраслях сельского хозяйства США. На основании экспериментов были получены производственные функции и найдены оптимальные точки для откорма свиней, птицы, надоя молока, использования удобрений. В качестве функций выпуска здесь, главным образом, используются многочлены (не выше второй степени) и функция Кобба-Дугласа, причем для каждого эксперимента обычно используется несколько видов функций, и полученные результаты сравниваются между собой.

Обращает внимание последняя, 17-я глава. В ней сделана попытка сравнить параметры функций Кобба-Дугласа, полученных на основании перекрестного обследования отдельных отраслей сельского хозяйства различных стран. Хотя авторы выражают сомнение в данных, служивших основой для расчетов, и особенно в са-

* R. M. Solow. Technical Change and Aggregate Production Function Review of Economics and Statistics, v. 39, p. 312—320.

мих расчетах, предполагается, что такие расчеты могут служить при разработке общей политики в области распределения ресурсов как в пределах одной страны, так и между странами.

Использование производственных функций в капиталистических странах в значительной мере сдерживается недостатком информации. Работы по исследованию производственных функций основываются большей частью на данных, полученных косвенными путями, особенно это относится к данным об основном капитале. Данные о затратах труда также в основном недостаточно точны, основываются на числе занятых работников и не включают действительного отработанного времени. Этим объясняются многие критические замечания, ставящие под сомнение значимость полученных функций. Советские экономисты находятся в качественно лучших условиях. Отчетная и плановая информация предприятий позволит получать функции с параметрами, гораздо более надежными по сравнению с зарубежными исследованиями. Меньшее значение по сравнению с капиталистическими условиями имеет у нас вопрос учета влияния качества руководства предприятием. Попытки учесть этот фактор в функциях выпуска до сих пор были неудачными.

Можно надеяться, что интересная книга Хеди и Диллона привлечет внимание экономистов как к исследованиям в области функции выпуска, так и ко всем производственным функциям вообще. Несомненно, общий вид функции дает для анализа и планирования больше, чем несколько известных ее точек, обычно используемых экономистами в настоящее время. Расчеты при построении функций достаточно просты и вполне себя оправдывают.

К сожалению, при переводе книги допущен ряд ошибок; особенно это касается главы, в которой излагаются вопросы планирования эксперимента.

А. И. Гладышевский

Г. П. Кюнц, В. Крелле, «Нелинейное программирование».
Пер. с немецкого. М., «Сов. радио», 1965

Среди весьма немногочисленных работ, посвященных теории и практике квадратичного программирования, монография Г. П. Кюнца и В. Крелле «Нелинейное программирование» выгодно отличается сжатостью и строгостью, но в то же время доступностью изложения.

Математическое программирование является одним из основных аппаратов теории исследования операций, которое включает в себя в виде разделов линейное и нелинейное программирование — частный случай нелинейного программирования.

Именно второму из названных разделов целиком посвящена рецензируемая книга, хотя она и носит более общее название — «Нелинейное программирование».

Квадратичное программирование — наиболее разработанный раздел нелинейного программирования дает способ решения важного класса нелинейных экстремальных задач, имеющих весьма широкое применение в науке и технике.

Интерес к таким задачам понятен, ибо аппроксимация реального процесса линейной моделью очень часто осуществляется ценой серьезных допущений.

Книга содержит пятнадцать глав. Первые четыре главы посвящены изложению основ линейной алгебры, линейному программированию, теореме Куна-Таккера и постановке задачи квадратичного программирования. С точки зрения специалиста эти главы не представляют особого интереса, ибо существует огромное количество литературы, где эти вопросы разобраны более подробно. Тем не менее, для читателя, впервые приступающего к изучению данной проблемы, эти главы будут полезны.

Остальные одиннадцать глав посвящены изложению отдельных методов квадратичного программирования, каждый из которых обязательно наглядно иллюстрируется на конкретных примерах.

Глава пятая посвящена изложению метода Хилдрета и Д'Эзопе. Это итерационный метод определения экстремума квадратичного функционала, сущность которого состоит в решении двойственных задач. Здесь функция цели должна быть строго вогнутой, что несколько ограничивает метод.

В шестой главе излагается метод Тейла и ван де Панна. Этот метод идейно близок к способу решения задач линейного программирования, основанному на вычислении всех вершин многогранника условий. Применимость метода, по-видимому, ограничена задачами квадратичного программирования, в которых оптимум достигается на гранях достаточно большой размерности.

Существуют две известные модификации симплекс-метода для квадратичного программирования: метод Била и метод Вульфа. В первом из этих методов идея симплекс-метода линейного программирования разрабатывается более глубоко. Сверх того, он дает, в отличие от второго метода, локальное решение даже в том случае,