ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1967 том III, вып. 4

АЛГОРИТМ С ОБРАТНОЙ МАТРИЦЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

К. В. КИМ

(*Москва*)

В данной статье описывается вычислительный процесс для решения транспортной задачи с дополнительными ограничениями. Обоснование описанного алгоритма содержится в работе [1]. Аналогичный алгоритм описан также в работе [2], в которой предлагается на каждом шаге улучшения плана строить и решать систему линейных уравнений порядка L, где L — число дополнительных ограничений. Ниже предлагается алгоритм, в котором используется обратная матрица упомянутой системы и указывается способ ее преобразования при улучшении плана. Использование обратной матрицы позволяет решать задачи с бóльшим числом дополнительных ограничений. В статье для простоты рассмотрена транспортная задача в матричной форме, однако при незначительном усложнении алгоритм может быть применен для решения распределительных задач с дополнительными ограничениями как в матричной, так и в сетевой форме.

Рассматривается задача: найти $\min \Sigma\, c_{ij}x_{ij}$ при ограничениях

$$\left\{\begin{array}{lll} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, & i = 1, \ldots, m, & \qquad (1) \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, & j = 1, \ldots, n-1, \quad x_{ij} \geqslant 0, & \\ \sum\limits_{ij} d_{ij}^{(t)} x_{ij} = h_t, & t = 1, \ldots, L. & \qquad (2) \end{array}\right.$$

Ограничения (1) будем называть транспортными ограничениями, ограничения (2) дополнительными. Предлагаемый алгоритм представляет собой модификацию метода последовательного улучшения плана. Пусть A — базисная матрица, соответствующая некоторому опорному плану нашей задачи. Нас обычно интересуют решения систем $Ay = g$ и $\gamma A = e$, где e — некоторая единичная строка, а g — некоторый столбец матрицы ограничений. В предлагаемом алгоритме базисные переменные опорного плана разбиваются на две группы. Первая группа содержит $m + n - 1$ переменных, вторая — L переменных. Это разбиение соответствует представлению матрицы A в виде:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

где A_{11} — невырожденная подматрица порядка $m+n-1$, соответствующая транспортным ограничениям. Соответственно представляются векторы y, g, γ и e. Пусть

$$y = \begin{pmatrix} \xi \\ \beta \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma = (\gamma_1, \gamma_2), \quad e = (e_1, e_2).$$

Тогда систему $Ay = g$ можно представить в виде

$$\begin{cases} A_{11}\xi + A_{12}\beta = g_1, \\ A_{21}\xi + A_{22}\beta = g_2. \end{cases}$$

Отсюда

$$\xi = A_{11}^{-1}g_1 - A_{11}^{-1}A_{12}\beta,$$

$$\beta = (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}(g_2 - A_{21}A_{11}^{-1}g_1).$$

В нашем алгоритме всегда хранится матрица

$$S = (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}.$$

Легко показать, что при переходе к следующему опорному плану матрица S изменяется с помощью почти элементарного преобразования [1].

Таким образом, для нахождения β и ξ при заданных g_1 и g_2 необходимо находить столбец $A_{11}^{-1}g_1$ и столбцы матрицы $A_{11}^{-1}A_{12}$. Однако эта задача не трудоемкая. Так как столбец g_1 и матрицы A_{11}, A_{12} состоят из столбцов матрицы транспортных ограничений, задача эта сводится к отысканию некоторых невычеркиваемых контуров.

Заметим, что в работе [2] описан аналогичный подход к исходной задаче, однако там предлагается на каждом шаге улучшения плана решать непосредственно систему уравнений

$$(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})\beta = g_2 - A_{21}A_{11}^{-1}g_1.$$

Рассмотрим систему $\gamma A = e$. Представим ее в виде

$$\begin{cases} \gamma_1 A_{11} + \gamma_2 A_{21} = e_1, \\ \gamma_1 A_{12} + \gamma_2 A_{22} = e_2. \end{cases}$$

Отсюда

$$\gamma_1 = (e_1 - \gamma_2 A_{21})A_{11}^{-1},$$

$$\gamma_2 = (e_2 - e_1 A_{11}^{-1}A_{12})(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}$$

или

$$\gamma_2 = (e_2 - e_1 A_{11}^{-1}A_{12})S.$$

Таким образом, при заданных e_1 и e_2 легко вычисляются γ_1 и γ_2. В нашем алгоритме будут храниться только те двойственные переменные, которые соответствуют дополнительным ограничениям. Мы их обозначим через w. При переходе к следующему опорному плану вектор w изменяется с помощью вектора γ_2.

При отыскании небазисной переменной, которую будем вводить в опорный план, используем прием, аналогичный методу потенциалов, а именно условие оптимальности представляется в виде

а) $u_i + v_j \leqslant c_{ij}'$, б) $u_i + v_j = c_{ij}'$ для x_{ij}, принадлежащих к первой группе базисных переменных, где

$$c_{ij}' = c_{ij} - \sum_t d_{ij}^{(t)} w_t.$$

Введем в исходную задачу искусственные переменные y_t и $\bar{y}_t$. Рассмотрим расширенную задачу: найти

$$\min \Big[\sum_{ij} c_{ij} x_{ij} + M \sum_t (y_t + \bar{y}_t) \Big]$$

при ограничениях

$$\sum x_{ij} = a_i, \quad \sum_i x_{ij} = b_j, \quad x_{ij} \geqslant 0,$$

$$\sum_{ij} d_{ij}^{(t)} x_{ij} + y_t - \bar{y}_t = h_t,$$

где M — большое число.

Введем следующие обозначения: Т — вычеркиваемая совокупность $m + n - 1$ клеток матрицы размером $m \times n$; $G(p, q)$ — совокупность клеток, образующих невычеркиваемый контур, причем все клетки этого контура за исключением (p, q) принадлежат совокупности Т; пронумеруем все клетки некоторого контура в порядке обхода, считая клетку (p, q) первой, тогда контур $G(p, q)$ распадается на два подмножества: $G'(p, q)$ — совокупность клеток с нечетными номерами; $G''(p, q)$ — совокупность клеток с четными номерами; $(\delta_{ij}(p, q))$ — матрица, элементы которой определяются формулами:

$$\delta_{ij}(p, q) = \begin{cases} 0 & \text{при } (i, j) \notin G(p, q), \\ 1 & \text{при } (i, j) \notin G'(p, q), \\ -1 & \text{при } (i, j) \notin G''(p, q). \end{cases}$$

Базисные переменные первой группы будем ставить в соответствие некоторой совокупности Т или, попросту говоря, будем записывать их в клетках этой совокупности. Остальные базисные переменные пронумеруем от 1 до h и запишем в таблице Д, имеющей вид

$$\{k_r, p_r, q_r, z_r\}, \qquad r = 1, \ldots, L,$$

где z_r — значение r-й базисной переменной, а величины k_r, p_r, q_r определяют наименование этой базисной переменной:

$$\begin{aligned} &\text{если} \quad k_r = 0, \quad \text{то} \quad z_r = x_{p_r q_r}, \\ &\text{если} \quad k_r = 1, \quad \text{то} \quad z_r = y_r, \\ &\text{если} \quad k_r = -1, \text{ то} \quad z_r = \bar{y}_r. \end{aligned}$$

В процессе вычислений хранятся также матрица $S = (s_{rt})$ и вектор $w = (w_t)$.

Исходный план расширенной задачи строится из опорного плана $(\bar{x}_{ij})$ транспортной задачи

$$\Big\{ \min \sum c_{ij} x_{ij} \;\Big|\; \sum_j x_{ij} = a_i, \quad \sum_i x_{ij} = b_j, \; x_{ij} \geqslant 0 \Big\}. \tag{3}$$

Базисные переменные опорного плана задачи (3) составляют первую группу базисных переменных исходного плана. Они одновременно определяют исходную совокупность Т. Во вторую группу включаются искусственные переменные. Они записываются в таблицу Д по правилам:

$$k_r = 1, \; z_r = h_r - \sum_{ij} d_{ij}^{(r)} \bar{x}_{ij}, \text{ если } h_r \geqslant \sum_{ij} d_{ij}^{(r)} \bar{x}_{ij},$$

$$k_r = -1,\ z_r = \sum_{ij} d_{ij}^{(r)} \bar{x}_{ij} - h_r,\ \text{если}\ h_r < \sum_{ij} d_{ij}^{(r)} \bar{x}_{ij}.$$

Исходные значения w и S определяются формулами:

$$w_t = Mk_t,$$

$$s_{rt} = \begin{cases} 0, & \text{если } r \neq t, \\ k_r, & \text{если } r = t. \end{cases}$$

Опишем алгоритм улучшения плана для нашей задачи в виде последовательности операций. Элементы информации о новом опорном плане будем помечать сверху знаком $\sim$.

1. Находим потенциалы u_i и v_j из уравнений:

$$u_i + v_j = c_{ij} - \sum_t d_{ij}^{(t)} w_t \ \text{для}\ (ij) \in \mathrm{T}.$$

2. Находим $\Delta(p_0, q_0) > \varepsilon$, где

$$\Delta(i, j) = u_i + v_j - \left(c_{ij} - \sum_t d_{ij}^{(t)} w_t\right),$$

а ε — некоторая положительная константа.

Если $\Delta(i, j) \leqslant \varepsilon$ для всех (i, j), то данный план оптимален с точностью до $\varphi(\varepsilon)$.

3. Пусть $\Delta = \Delta(p_0, q_0) > \varepsilon$. Тогда находим $\alpha = (\alpha_t)$ по формуле:

$$\alpha_t = \sum_{ij} d_{ij}^{(t)} \delta_{ij}(p_0, q_0).$$

Затем вычисляем $\beta = (\beta_r)$ по формуле $\beta = S\alpha$.

4. Для $(i, j) \in T$ вычислим:

$$\xi_{ij} = \sum_{k_r = 0} \beta_r \delta_{ij}(p_r, q_r) - \delta_{ij}(p_0, q_0).$$

5. Находим

$$\vartheta = \min \left\{ \min_{(i,j) \in T,\ \xi_{ij} > 0} \frac{x_{ij}}{\xi_{ij}},\ \min_{\beta_i > 0} \frac{z_r}{\beta_r} \right\}.$$

6. Изменяем значения базисных переменных

$$\tilde{x}_{ij} = x_{ij} - \vartheta \xi_{ij} \quad \text{для}\ (i, j) \in T,$$

$$\tilde{z}_r = z_r - \vartheta \beta_r \quad \text{для}\ r = 1, \ldots, L.$$

7. Производим изменения в структуре множества Т и таблицы Д. Возможны три случая:

а) пусть $\vartheta = z_{r_0} / \beta_{r_0}$, тогда

$$\tilde{k}_{r_0} = 0, \quad \tilde{p}_{r_0} = p_0, \quad \tilde{q}_{r_0} = q_0, \quad \tilde{z}_{r_0} = \vartheta,$$

множество Т не меняется;

б) пусть $\vartheta = x_{i_0 j_0} / \xi_{i_0 j_0}$ и $(i_0, j_0) \in G(p_0, q_0)$, тогда

$$\tilde{\mathrm{T}} = (p_0, q_0) \cup \mathrm{T} \setminus (i_0, j_0),\ \tilde{x}_{p_0 q_0} = \vartheta,$$

таблица Д не меняется;

в) пусть $\vartheta = x_{i_0 j_0} / \xi_{i_0 j_0}$ и $(i_0, j_0) \notin (p_0, q_0)$, тогда находим r_0 такое, что $(i_0, j_0) \in G(p_{r_0}, q_{r_0})$ и полагаем $\tilde{\mathrm{T}} = (p_{r_0}, q_{r_0}) \cup \mathrm{T} \setminus (i_0, j_0)$, т. е. базисная переменная, записанная ранее в r_0-й строке таблицы Д переносится в соответствующую клетку множества Т; затем полагаем

$$\tilde{k}_{r_0} = 0, \quad \tilde{p}_{r_0} = p_0, \quad \tilde{q}_{r_0} = q_0, \quad \tilde{z}_{r_0} = \vartheta.$$

8. Преобразуем матрицу S. Матрица S преобразуется по «симплексным» правилам. В качестве ключевого столбца используется вектор β. Обозначим элементы этого столбца через s_{r0}. В случае а) в качестве ключевой строки используется r_0-я строка. Преобразование ведется по формулам:

$$\tilde{s}_{rt} = s_{rt} - \frac{s_{r0}\, s_{r_0 t}}{s_{r_0 0}}, \quad r \neq r_0,$$

$$\tilde{s}_{r_0 t} = \frac{s_{r_0 t}}{s_{r_0 0}}.$$

В случае б) в качестве ключевой строки используется дополнительная строка (s_{0t}), получаемая по формулам:

$$s_{00} = 1, \quad s_{0t} = \frac{1}{\xi_{i_0 j_0}} \sum_{r=1}^{L} s_{rt}\rho_r,$$

$$\rho_r = \begin{cases} 0, & \text{если } k_r \neq 0, \\ \delta_{i_0 j_0}(p_r, q_r), & \text{если } k_r = 0. \end{cases}$$

Преобразование ведется по формуле $\tilde{s}_{rt} = s_{rt} - s_{r0}s_{0t}$. В случае в) преобразование ведется так же, как в случае б), а затем дополнительная (нулевая) строка записывается вместо r_0-й строки.

9. Изменяем вектор w по формуле $\tilde{w} = w - \Delta\gamma$, где $\gamma = e\bar{S}$, а вектор $e = (e_r)$ определяется в случаях а) и в) формулами:

$$e_r = \begin{cases} 0, & \text{если } r \neq r_0, \\ 1, & \text{если } r = r_0, \end{cases}$$

в случае б)

$$e_r = -\frac{\rho_r}{\delta_{i_0 j_0}(\rho_0, q_0)}.$$

Заметим, что при изменении вектора w используется уже измененная матрица $\tilde{S}$. После выполнения п. 9 переходим снова к п. 1.

Выскажем некоторые замечания по поводу построения исходного опорного плана и выбора значений Δ при улучшении плана. Очевидно, что величину Δ можно представить в виде линейной функции от M, т. е. $\Delta = \Delta' + \Delta'' M$. Будем при улучшении плана выбирать такое значение $\Delta > \varepsilon$, для которого отношение $-\Delta' / \Delta''$ достигает минимального значения. Если исходный план нашей задачи был построен из оптимального плана задачи (3), то оптимальный план мы получим, как только обратятся в нуль все искусственные переменные. Этот способ выбора значений Δ был предложен В. А. Машем.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. В. Ким. Об использовании специфики условий задачи в методе улучшения плана. Экономика и матем. методы, 1966, т. II, вып. 1.
2. Э. А. Мухачева. Транспортная задача на сети с дополнительными ограничениями. Экономика и матем. методы, 1965, т. I, вып. 4.

Поступила в редакцию
4 X 1965

ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1967
том III, вып. 4

ОБ ОДНОМ ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО И ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

С. М. МОВШОВИЧ

(*Москва*)

Один из известных методов решения задач математического программирования заключается в отыскании безусловного минимума (или максимума) некоторой специально выбранной функции $F(x)$. Этот метод часто называют методом «штрафов», или методом «штрафных функций», так как суть его состоит в том, что ограничения исходной задачи математического программирования заменяются «штрафами» за их нарушение. Методу штрафов посвящены, например, работы [1—3].

В настоящей работе применительно к задачам линейного и выпуклого программирования исследуется близость решения исходной задачи и задачи на безусловный минимум функции $F(x)$. Этому вопросу посвящен раздел 1. Далее (раздел 2) исследуются условия монотонности и скорость сходимости одного процесса отыскания безусловного минимума функции $F(x)$.

1°. Рассматривается задача математического программирования. Необходимо отыскать вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in R^n$, удовлетворяющий условиям

$$g_i(x) \leqslant b_i, \quad i = 1, \ldots, m \tag{1}$$

и минимизирующий функцию

$$f(x) - \min. \tag{2}$$

Здесь $g_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$, $f(x)$ — скалярные функции, b_i, $i = 1, \ldots, m$ — действительные числа.

Наряду с задачей (1), (2) рассмотрим задачу отыскания безусловного минимума функции

$$F(x) = f(x) + \alpha \sum_{i=1}^{m} \Phi(t_i(x)), \tag{3}$$

где

$$t_i(x) = g_i(x) - b_i. \tag{4}$$

При соответствующем выборе функций $\Phi(t)$ и константы $\alpha > 0$ из решения задачи (3) — (4) можно получить приближенное решение задачи (1) — (2).

Будем рассматривать разрешимые задачи (1) — (2).

Задача (1) — (2) называется разрешимой, если множество $M = \{x : g_i(x) \leqslant b_i, i = 1, \ldots, m\}$ непусто и существует точка $x^* \in M$ такая, что $f(x^*) = \min\limits_{x \in M} f(x)$. Обозначим также $M_\varepsilon = \{x : g_i(x) \leqslant b_i + \varepsilon, i = 1, \ldots, m, \varepsilon > 0\}$.

Докажем сначала две леммы, необходимые для оценки близости решений задач (1) — (2) и (3) — (4).

Лемма 1. *Если задача* (1) — (2) *разрешима, функции* $g_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$, $f(x)$ *выпуклые и существует точка* x^0 *такая, что* $g_i(x^0) < b_i$,