ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1971 том VII, вып. 1

РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ В СЛУЧАЕ СХЕМЫ С ДВУМЯ ДИСПЕРСИЯМИ

В. А. КОЛЕМАЕВ

(Москва)

При расчете производственных функций в экономике в качестве носителей информации выступают отдельные хозяйственные объекты, число которых в пределах рассматриваемой отрасли или территории ограничено. Для увеличения числа наблюдений в расчет вводят данные по каждому объекту, взятые за ряд последовательных промежутков времени, при этом необходимо скорректировать уравнение регрессии и принять во внимание автокорреляцию погрешностей. Для случая известной матрицы автокорреляции разработан соответствующий математический аппарат (см., например, [1]). Если эта матрица неизвестна, то можно применить метод максимума правдоподобия для некоторой конечной схемы. В частности, в данной статье для сформулированной выше ситуации предлагается следующая схема * с двумя дисперсиями

$$y_{j,t} = \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_{i,j,t} + \xi_{j,t}; \quad \xi_{j,t} = h_j + \varepsilon_{j,t};$$

$Mh_j = M\varepsilon_{j,t} = 0$; $Dh_j = \sigma_0^2$; $D\varepsilon_{j,t} = \sigma^2$; $j = 1, \ldots, n$; $t = 1, \ldots, T$, где j — номер объекта; t — время; $y_{j,t}$, $x_{i,j,t}$ — центрированные значения $\left(\sum_{j,t} y_{j,t} = 0, \quad \sum_{j,t} x_{i,j,t} = 0\right)$ зависимой переменной и факторов для наблюдения (j, t); h_j — случайная составляющая, отражающая колеблемость неучтенных факторов от объекта к объекту; $\varepsilon_{j,t}$ — остаточная случайная составляющая.

В дальнейшем предполагается, что выполнены все обычные для регрессионного анализа допущения (см. [2]), а h_j, $\varepsilon_{j,t}$, $j = 1, \ldots, n$, $t = 1, \ldots, T$, взаимно независимы и распределены нормально. Вследствие независимости матрица ковариаций имеет вид

$$\Gamma = \|\gamma_{j,t,j',t'}\| = \left\| \begin{matrix} \Gamma_1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & \Gamma_n \end{matrix} \right\|, \quad \Gamma_j = \left\| \begin{matrix} \sigma^2 + \sigma_0^2 & \sigma_0^2 & \ldots & \sigma_0^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \sigma_0^2 & \sigma_0^2 & \ldots & \sigma^2 + \sigma_0^2 \end{matrix} \right\| \quad (T \times T),$$

Замечание. Если $\sigma_0^2 = 0$, то Γ диагональна и надо применять метод наименьших квадратов. При $\sigma^2 = 0$ для параметров регрессии получаем $n(T-1)$ обычных уравнений. Чтобы исключить этот вырожденный случай, полагаем $\sigma^2 > 0$.

Переходя к основному изложению, укажем, что доказательство вспомогательных предложений вынесено в приложение.

* Если для каждого объекта имеется свое число наблюдений, то суть выводов сохранится, но формулы станут более громоздкими.

1. ТОЧЕЧНЫЕ ОЦЕНКИ

Сначала исследуем поведение оценок σ^2, σ_0^2, найденных по невязкам определенным по методу наименьших квадратов; затем эти оценки используем для отыскания параметров регрессии. Введем обозначения
$\Gamma^{-1} = \|\varkappa_{j,t,j',t'}\|$;

$$\varkappa_{j,t,j',t'} = \begin{cases} \dfrac{\sigma^2 + (T-1)\sigma^2_0}{\sigma^2 + T\sigma^2_0}, & j = j', t = t', \\ -\dfrac{\sigma_0^2}{\sigma^2 + T\sigma_0^2}, & j = j', t \neq t', \\ 0, & j \neq j', \quad \varkappa_{j,t,t'} = \varkappa_{j,t,j',t'}; \end{cases}$$

$$C = \|C_{i,m}\| = A^{-1}, \ A = X^*X = \|(i, m)\|, \ (i, m) = \sum_{j,t} x_{i,j,t}\, x_{m,j,t};$$

$$G = \|g_{j,m}\| = B^{-1}, \ B = X^*\sigma^2\Gamma^{-1}X - \|[i, m]\|; \ [i, m] = \sum_{j,t',t} x_{i,j,t}\sigma^2\varkappa_{j,t,t'}x_{m,j,t'};$$

$$[y, m] = \sum y_{j,t}\sigma^2\varkappa_{j,t,t'}\, x_{m,j,t};$$

$$X = \|x_{l,i}\|, \ l = (j, t), \quad j = 1, \ldots, n, \quad t = 1, \ldots, T.$$

Здесь X^* — транспонированная матрица.

Применив метод максимума правдоподобия (выкладки в приложении), получим k уравнений для параметров регрессии

$$\sum_i [i, m]\,\hat{\beta}_i = [y, m], \ m = 1, \ldots, k, \tag{1}$$

и два уравнения для дисперсий

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{nT}\left[\sum_{j,t} z^2_{j,t} - \frac{1}{T-1}\sum_{j,t\neq t'} z_{j,t}z_{j,t'}\right];$$

$$\hat{\sigma}^2_0 = \frac{1}{nT(T-1)}\sum_{j,t\neq t'} z_{j,t}z_{j,t'}; \tag{2}$$

$$z_{j,t} = y_{j,t} - \sum_j \hat{\beta}_i x_{i,j,t}, \ j = 1, \ldots, n, \ t = 1, \ldots, T.$$

Как известно [3, стр. 547], эти оценки асимптотически нормальны и эффективны. Система уравнений (1), (2) может быть решена методом последовательных приближений, однако анализ ее решения затруднителен. В связи с этим исследуем оценки $\tilde{\sigma}^2$, $\tilde{\sigma}_0^2$ параметров σ^2, σ_0^2, полученных на основе оценок $\tilde{\beta}_i$ по методу наименьших квадратов. В этом случае, как известно (см. например, [1]),

$$\tilde{\beta} = (X^*X)^{-1}\ X^*Y = CX^*Y, \ Y = \begin{Vmatrix} Y_{1,1} \\ \vdots \\ Y_{2,1} \\ \vdots \\ Y_{n,T} \end{Vmatrix}, \ \tilde{\beta} = \begin{Vmatrix} \tilde{\beta}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\beta}_k \end{Vmatrix}, \tag{3}$$

поэтому $Z = Y - X\tilde{\beta} = Y - MY + X(\beta - \tilde{\beta}) = (E - XCX^*)(Y - MY) = (E - XCX^*)\xi$.

Прямой подсчет дает* $MZZ^* = M(E - XCX^*)\xi\xi^*(E - XCX^*) =$

---

* Здесь и далее употребляется общепринятое сокращение (символ Кронекера)

$$\delta_{t,t'} = \begin{cases} 1, & t = t', \\ 0, & t \neq t'. \end{cases}$$

$= (E - XCX^*)\Gamma(E - XCX^*)$. Поскольку $\Gamma = \sigma^2 E + \sigma_0{}^2 e$, где

$$e = \begin{Vmatrix} \underline{e_1|} & \cdots & \underline{|0} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \underline{0|} & & \underline{|e_n} \end{Vmatrix}, \quad e_j = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{Vmatrix} (T \times T),$$

то $M\tilde{Z}\tilde{Z}^* = \sigma^2(E - XCX^*)E(E - XCX^*) + \sigma^2(E - XCX^*)e(E - XCX^*) = \sigma^2(X - XCX^*) + \sigma_0{}^2(e - XCX^*e - eXCX^* + XCX^*eXCX^*)$, откуда

$$COV(z_{j,t} z_{j,t}) = \sigma^2\Big(\sigma_{l,t'} - \sum_{i,m} x_{i,j,t} c_{i,m} x_{m,j,t'}\Big) + \sigma_0^2\Big(1 - \sum_{i,m,s} x_{m,j,s} c_{i,m} \times$$
$$\times (x_{i,j,t} + x_{i,j,t'}\Big) + \sum_r \Big(\sum_{i,m,s} x_{m,r,s} c_{i,m} x_{i,j,t}\Big)\Big(\sum_{i,m,s} x_{m,r,s} c_{i,m} x_{i,j,t'}\Big).$$

Введем теперь условие, которое означает, что выборочные значения факторов слабо коррелированы

$$\Big|\sum_{j,t} x_{i,j,t} x_{m,j,t}\Big|^2 \ll \sum_{j,t} x^2_{i,j,t} \sum_{j,t} x^2_{m,j,t}, \quad i \neq m;\ i, m = 1, \ldots, k. \qquad (3')$$

Лемма 1. *Если выполнено условие* (3′), *то*

$$\frac{1}{nT} M \sum_{j,t} \tilde{z}^2_{j,t} = \sigma^2 + \sigma_0{}^2 + 0\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\frac{1}{nT(T-1)} M \sum_{j,t\neq t'} \tilde{z}_{j,t} \tilde{z}_{j,t'} = \sigma_0^2 + 0\left(\frac{1}{n}\right).$$

Из леммы 1 вытекает, что оценки (2) с $z_{j,t} = \tilde{z}_{j,t}$ не имеют асимптотического смещения, что констатируется теоремой 1, в формулировке которой применяются обозначения

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2(\tilde{Z}); \quad \tilde{\sigma}_0{}^2 = \sigma_0{}^2(\tilde{Z});$$

$$\sigma^2(Z) = \frac{1}{nT}\left[\sum_{j,t} z^2_{j,t} - \frac{1}{T-1}\sum_{j,t\neq t'} z_{j,t} z_{j,t'}\right];$$

$$\sigma_0{}^2(z) = \frac{1}{nT(T-1)} \sum_{j,t\neq t'} z_{j,t} z_{j,t'}. \qquad (4)$$

Теорема 1. Если *имеет место условие* (3′), *то при* $n \to \infty$ *оценки* $\tilde{\sigma}^2$, $\tilde{\sigma}_0{}^2$ *асимптотически не смещены.*

В дальнейшем понадобятся следующие две леммы.

Лемма 2. *Если* $\sigma^{*2} = \sigma^2(\xi)$, $\sigma_0{}^{*2} = \sigma_0{}^2(\xi)$, *то*

$$D\sigma^{*2} = \frac{2}{n(T-1)}\sigma^4,$$

$$D\sigma_0^{*2} = \frac{2}{n}\left(\sigma_0{}^4 + \frac{2}{T}\sigma_0{}^2\sigma^2 + \frac{1}{T(T-1)}\sigma^4\right). \qquad (5)$$

Лемма 3. *Если выполнено условие* (3′), *то при* $n \to \infty$ *оценки* $\tilde{\sigma}^2$, $\tilde{\sigma}_0{}^2$ *состоятельны.*

Теорема 2. *В условиях леммы 3 оценки* β_i, *найденные по уравнению* (1) *с* $\tilde{\sigma}^2$, $\tilde{\sigma}_0{}^2$, *состоятельны.*

Доказательство вытекает из леммы 3.

Таким образом, показано, что при достаточно большом n «хорошие» оценки параметров σ^2, $\sigma_0{}^2$ могут быть получены в результате нулевого приближения (чистый метод наименьших квадратов), а оценки параметров регрессии в результате первого приближения (метод максимума правдоподобия с $\Gamma = \Gamma(\tilde{\sigma}^2, \tilde{\sigma}_0{}^2)$.

2. СРАВНЕНИЕ ОЦЕНОК НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ И МАКСИМУМА ПРАВДОПОДОБИЯ

В [4] при достаточно слабых ограничениях* показано, что оценки параметров регрессии, найденные по методу наименьших квадратов, являются состоятельными и асимптотически эффективными. Теорема 2 констатирует состоятельность оценок первого приближения для схемы с двумя дисперсиями, т. е. оценок максимума правдоподобия с $\bar\sigma^2$, $\bar\sigma_0^2$, найденными по невязкам метода наименьших квадратов. В этом пункте будет показано, что при определенных условиях предпочтительнее пользоваться оценками первого приближения, поскольку последние учитывают специфику строения корреляционной матрицы погрешностей.

Найдем корреляционные матрицы оценок по методу наименьших квадратов и по методу максимума правдоподобия. Имеем $\tilde\beta = CX^*Y$, поэтому $\tilde\gamma = \|\tilde\gamma_{i,m}\| = M(\tilde\beta - \beta)(\tilde\beta - \beta)^* = M(CX^*\xi)(CX^*\xi)^* = CX^*\Gamma XC = CX^*(\sigma^2E + \sigma_0^2e)XC = \sigma^2C + \sigma_0^2CX^*eXC.$

Аналогично для оценок по методу максимума правдоподобия $\hat\beta = (X^*\Gamma^{-1}X)^{-1}X^*\Gamma^{-1}Y$ (см. (1))

$$\gamma = \|\hat\gamma_{i,m}\| = M(\hat\beta - \beta)(\hat\beta - \beta)^* = (X^*\Gamma^{-1}X)^{-1} = \left(\Big\|\sum_{j,t,t'} x_{i,j,t}\varkappa_{j,t,t'}x_{m,j,t'}\Big\|\right)^{-1} =$$

$$= \sigma^2\left[\Big\|\sum_{j,t} x_{i,j,t}x_{m,j,t} - \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2 + T\sigma_0^2}\sum_{j,t,t'} x_{i,j,t}x_{m,j,t}\Big\|\right]^{-1} = \sigma^2(XX^* - \theta X^*eX),$$

$$\theta = \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2 + T\sigma_0^2}.$$

Введем теперь условие, что выборочные значения осредненных по t факторов слабо коррелированы

$$\left|\sum_{j,t,t'} x_{i,j,t}x_{m,j,t'}\right|^2 \leqslant \left(\sum_{j,t,t'} x_{i,j,t}x_{i,j,t'}\right)\left(\sum_{j,t,t'} x_{m,j,t}x_{m,j,t'}\right),\ i \neq m;\ i,m = 1,\ldots,k. \tag{5'}$$

Лемма 4. *Если выполнены условия* (3′) *и* (5′), *то главные члены разложений дисперсий по методу наименьших квадратов и первого приближения имеют вид*

$$D\tilde\beta_i = \left(\sum_{j,t} x_{i,j,t}^2\right)^{-1}(\sigma^2 + Tp\sigma_0^{(2)}) + o(\omega);$$

$$D\hat\beta_i = \left(\sum_{j,t} x_{i,j,t}^2\right)^{-1}\left(\sigma^2 + \frac{1}{1 + Tq\sigma_0^2/\sigma^2}Tp\sigma_0^2\right) + O\left(\frac{\omega}{n}\right).$$

В формулировке леммы использованы обозначения

$$p = \frac{1}{T}\left(\sum_{j,t} x_{i,j,t}^2\right)^{-1}\sum_j\left(\sum_t x_{i,j,t}\right)^2,\ q = 1 - p,\ \omega = \max_i\left(\sum_{j,t} x_{i,j,t}^2\right)^{-1}.$$

Поскольку

$$\sum_t x_{i,j,t}^2 - \frac{1}{T}\left(\sum_t x_{i,j,t}\right)^2 = \sum_t\left(x_{i,j,t} - \frac{1}{T}\sum_t x_{i,j,t}\right)^2 \geqslant 0,$$

то $0 \leqslant p \leqslant 1$.

Из леммы 4 следует (при условиях (3′), (5′)) что оценки первого приближения параметров регрессии более эффективны, чем оценки по методу

* Погрешности наблюдений образуют стационарный процесс с неотрицательной спектральной плотностью, и наложены некоторые ограничения на характер связи и роста регрессионных функций.

наименьших квадратов. Эти оценки имеют одинаковую эффективность только в том случае, если отсутствует разброс наблюдений факторов по каждому объекту. Понятно, что и те, и другие оценки вследствие очевидного условия $\sum\limits_{j,t} x_{i,j,t}^2 \to \infty$ при $nT \to \infty$ асимптотически эффективны.

Теперь покажем целесообразность применения схемы с двумя дисперсиями. Во введении указывалось, что потребность в такой схеме возникает, когда число объектов ограничено и число наблюдений можно увеличить только при неоднократном наблюдении за каждым объектом. Будем сравнивать эффективность оценок, полученных по осредненным по t факторам и без такого осреднения. В первом случае имеем обычную схему с одной дисперсией $\sigma_0^2 + (\sigma^2/T)$ для наблюдений $(\bar{y}_j, \bar{x}_{1,j}, \ldots, \bar{x}_{k,j})$, $\bar{y}_j = \left(\frac{1}{T}\right)\sum\limits_t y_{j,t}$, $j = 1, \ldots, n$, во втором случае — схему с двумя дисперсиями σ^2, σ_0^2 и наблюдениями $(y_{j,t}, x_{1,j,t}, \ldots, x_{k,j,t})$, $j = 1, \ldots, n$, $t = 1, \ldots, T$.

Имеем в первом случае

$$D\bar{\beta}_i = \left(\frac{\sigma^2}{T} + \sigma_0^2\right)\bar{c}_{i,i} \simeq T\left[\sum_j\left(\sum_t x_{i,\bar{j},t}\right)^2\right]^{-1}(\sigma^2 + \sigma_0^2 T),$$

где

$$\bar{C} = \|\bar{c}_{i,m}\| = \bar{A}^{-1}, \quad \bar{A} = \left\|\sum_j \bar{x}_{i,j} \times x_{m,j}\right\|, \quad \bar{x}_{i,j} = \frac{1}{T}\sum_t x_{i,j,t}.$$

Поскольку

$$\frac{1}{T}\sum_j\left(\sum_t x_{i,j,t}\right)^2 \leqslant \sum_{j,t} x_{i,j,t}^2,$$

то $D\bar{\beta}_i \geqslant D\tilde{\beta}_i \geqslant D\hat{\beta}_i$.

Таким образом, введение дополнительных наблюдений за каждым объектом увеличивает эффективность, даже если применять метод наименьших квадратов; эффективность возрастает при использовании метода максимума правдоподобия первого приближения.

3. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ

Будем предполагать, что $\tilde{\sigma}^2$, $\tilde{\sigma}_0^2$ — результат нулевого приближения, а β_i — первого. По нашему мнению, необходимо проверить три серии гипотез.

1) В рамках модели гипотеза $\sigma_0 = 0$.

Для ее проверки воспользуемся предложенным в [5, стр. 362] способом испытания независимости двух нормальных случайных величин. Роль наблюдений будут играть $\tilde{z}_{j,t}$, $\tilde{z}_{j,T-t}$, $t = 1, \ldots, T_1$, где

$$T_1 = \begin{cases} T/2, & T = 2l, \\ (T-1)/2, & T = 2l+1, \end{cases}$$

тогда оценка коэффициента корреляции примет вид

$$r = \left(\sum_{j,t}\tilde{z}_{j,t}\tilde{z}_{j,T-t}\right)\left(\sum_{j,t}\tilde{z}_{j,t}^2\sum_{j,t}\tilde{z}_{j,T-t}^2\right)^{-1/2}, \quad t = 1, \ldots, T.$$

В случае $\sigma_0^2 = 0$, согласно [5], величина

$$\tau = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{nT_1 - 2}$$

распределена по закону Стьюдента с $(nT_1 - 2)$ степенями свободы.

Итак (τ_α — α-квантиль распределения Стьюдента), если $|\tau| < \tau_\alpha$ — гипотеза принимается, если $|\tau| \geqslant \tau_\alpha$ — гипотеза отвергается.

Понятно, что указанная процедура верна только асимптотически вследствие свойств $\tilde{z}_{j,t}$.

2) В предположении $\sigma_0^2 = 0$ проверяется обычный для метода наименьших квадратов [2] комплекс гипотез о значимости уравнения в целом и отдельных его коэффициентов.

3) Случай $\sigma_0^2 > 0$.

Сначала преобразуем $X \to QX$, $Y \to QY$, которое приводит Γ к диагональному виду

$$Q^*\Gamma Q = \mu E. \tag{6}$$

Учитывая структуру Γ, будем искать Q в виде

$$Q = \left\| \begin{matrix} \boxed{Q_1} & \cdots & \boxed{0} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \boxed{0} & \cdots & \boxed{Q_n} \end{matrix} \right\|, \quad Q_j = \left\| \begin{matrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ b & b & \cdots & a \end{matrix} \right\| (T \times T).$$

Из (6) получаем два соотношения для a, b (выбираем такие корни, для которых $Q \to E$ при $\sigma_0^2 \to 0$)

$$\frac{a}{b} = -(T - 1 + \nu^2) - \nu\sqrt{T + \nu^2}, \quad \nu^2 = \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2};$$

$$\frac{\mu}{b} = \frac{\nu^2(T + \nu^2)}{1 + \nu^2}\left(T + 2\nu^2 + 2\nu\sqrt{\nu^2 + T}\right).$$

Выполнив преобразование, необходимо произвести проверку обычного комплекса гипотез (т. е. проверить адекватность уравнения и значимость коэффициентов).

4. ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ

Найдем асимптотические доверительные интервалы для параметров. Как показано выше, хорошими приближениями к σ^2, σ_0^2 являются оценки $\tilde{\sigma}^2$, $\tilde{\sigma}_0^2$ в условиях леммы 3 или оценки (4) при достаточном числе итераций. Итак, приняв оценки за истинные значения, находим*

$$M(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta^*) = (X^*\Gamma^{-1}X)^{-1} = \sigma^2 G. \tag{7}$$

Таким образом, с вероятностью $1-2\alpha$, $\hat{\beta}_i - U_\alpha\tilde{\sigma}\sqrt{g_{i,i}} < \beta_i < \tilde{\beta}_i + U_\alpha\tilde{\sigma}\sqrt{g_{i,i}}$. U_α — α-квантиль стандартного нормального распределения.

Выпишем доверительные интервалы для $\hat{\sigma}^2$, $\hat{\sigma}_0^2$, опираясь на лемму 2, в предположении, что имело место достаточное число итераций

$$\hat{\sigma}^2 - U_\alpha\sqrt{D\sigma^{*2}} < \sigma^2 < \hat{\sigma}^2 + U_\alpha\sqrt{D\sigma^{*2}};$$

$$\hat{\sigma}_0^2 - U_\alpha\sqrt{D\sigma_0^{*2}} < \sigma_0^2 < \hat{\sigma}_0^2 + U_\alpha\sqrt{D\sigma_0^{*2}}.$$

$D\sigma^{*2}$, $D\sigma_0^{*2}$ находим по формулам (5) с $\sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$, $\sigma^2 = \hat{\sigma}^2$.

Используя (7), получаем доверительный интервал для уравнения регрессии

$$\hat{y} - U_\alpha\hat{\sigma}\sqrt{\sum_{i,m} g_{i,m}x_i x_m} \leqslant \sum_{i=1}^{k}\beta_i x_i \leqslant \hat{y} + U_\alpha^{\hat{\sigma}}\sqrt{\sum_{i,m} g_{i,m}x_i x_m},$$

$$\hat{y} = \sum_i \hat{\beta}_i x_i.$$

---

* Здесь применяется матричное выражение для решения уравнения (1) $\hat{\beta} = (X^*\Gamma^{-1}X)^{-1}X^*Y$.

В заключение можно сказать, что приведенные результаты, по-видимому, могут быть усилены и уточнены, а условия — ослаблены.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Оценки максимума правдоподобия. Вначале найдем определитель и матрицу, обратную к Γ.

Имеем $\det \Gamma = \Pi \det \Gamma_j = \Delta^n(T)$. Поскольку

$$\Delta(T) = \begin{vmatrix} \sigma^2+\sigma_0^2 & \sigma_0^2 & \cdots & \sigma_0^2 \\ \sigma_0^2 & \sigma^2+\sigma_0^2 & \cdots & \sigma_0^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_0^2 & \sigma_0^2 & & \sigma^2+\sigma_0^2 \end{vmatrix} = \sigma^2\Delta(T-1) + \sigma^2\widetilde{\Delta}(T-1),$$

где

$$\widetilde{\Delta}(T) = \begin{vmatrix} \sigma_0^2 & \sigma_0^2 & \cdots & \sigma_0^2 \\ \sigma_0^2 & \sigma^2+\sigma_0^2 & \cdots & \sigma_0^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_0^2 & \sigma_0^2 & \cdots & \sigma^2+\sigma_0^2 \end{vmatrix} = \sigma^2\widetilde{\Delta}(T-1) = \sigma^{2(T-1)}\sigma_0^2,$$

то $\det \Gamma = \Delta^n(T) = [\sigma^{2(T-1)}(\sigma^2 + T\sigma_0^2)]^n$.

Нетрудно непосредственно найти

$$\Gamma^{-1} = \begin{Vmatrix} \Gamma_1^{-1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \Gamma_n^{-1} \end{Vmatrix}, \quad \Gamma_j^{-1} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \Delta(T-1)/\Delta(T) & -\widetilde{\Delta}(T-1)/\Delta(T) & \cdots & -\widetilde{\Delta}(T-1)/\Delta(T) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\widetilde{\Delta}(T-1)/\Delta(T) & -\widetilde{\Delta}(T-1)/\Delta(T) & \cdots & \Delta(T-1)/\Delta(T) \end{Vmatrix},$$

так что

$$\Gamma^{-1} = \|\varkappa_{j,t,j',t'}\|, \quad \varkappa_{j,t,j',t'} = \begin{cases} 0, & j \neq j', \\ -\dfrac{\sigma_0^2}{\sigma^2(\sigma^2+T\sigma_0^2)}, & j = j',\ t \neq t', \\ \dfrac{\sigma^2+(T-1)\sigma_0^2}{\sigma^2(\sigma^2+T\sigma_0^2)}, & j = j',\ t = t'. \end{cases}$$

Выпишем теперь логарифм функции правдоподобия

$$\ln L = {}^1/_2[\ln(\det\Gamma) + (Y - X\beta)^*\Gamma^{-1}(Y - X\beta)] = \Gamma(\beta).$$

Оценки $\hat{\beta}_i$ находим, как обычно, из условия $\partial\Gamma/\partial\beta = X^*\Gamma^{-1}(Y - X\beta) + (Y - X\beta^*\Gamma^{-1}X) = 0$, откуда $X^*\Gamma^{-1}X\hat{\beta} - X^*\Gamma^{-1}Y$, или в обычных обозначениях

$$\sum_i \Bigl(\sum_{j,t,j',t'} x_{i,j,t}\varkappa_{j,t,j',t'}x_{m,j',t'}\Bigr)\hat{\beta}_i = \sum_{j,t,j',t'} x_{m,j,t}\varkappa_{j,t,j',t'}y_{j',t'}, \quad m = 1, \ldots, k.$$

Для получения оценок $\hat{\sigma}^2$, $\hat{\sigma}_0^2$ придется воспользоваться конкретным видом выражения логарифма функции правдоподобия

$$\prod(\sigma_0^2\sigma^2) = -\frac{1}{2}\Big\{n\ln\left[\sigma^{2(T-1)}(\sigma^2+T\sigma_0^2)\right] + \frac{\sigma^2+\sigma_0^2(T-1)}{\sigma^2+T\sigma_0^2}\sum_{j,t} z_{j,t}^2 - $$
$$-\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2+T\sigma_0^2}\sum_{j,\,t\neq t'} z_{j,t}z_{j,t'}\Big\}.$$

Заменим переменные: $u = \sigma^{-2}$, $v = (\sigma^2 + T\sigma_0^2)^{-1}$. Тогда

$$\prod(u, v) = -\frac{1}{2}\Big\{-n\ln u^{T-1}v + \frac{v+(T-1)u}{T}\sum_{j,t} z_{j,t}^2 - $$
$$-\frac{u-v}{T}\sum_{j,\,t\neq t'} z_{j,t}z_{j,t'}\Big\}.$$

Поскольку якобиан этого преобразования отличен от нуля, то можно выписать следующие уравнения для оценок

$$-2\frac{\partial\Gamma}{\partial u} = -\frac{n(T-1)}{n} - \frac{T-1}{T}\sum_{j,t} z_{j,t}^2 - \frac{1}{T}\sum_{j,\,t\neq t'} z_{j,t}z_{j,t'} = 0,$$
$$-2\frac{\partial\Gamma}{\partial v} = -\frac{n}{v} + \frac{1}{T}\sum_{j,t} z_{j,t}^2 + \frac{1}{T}\sum_{j,\,t\neq t'} z_{j,t}z_{j,t'} = 0,$$

откуда

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{nT}\Big(\sum_{j,t} z_{j,t}^2 - \frac{1}{T-1}\sum_{j,\,t\neq t'} z_{j,t}z_{j,t'}\Big), \quad \frac{1}{v} = \frac{1}{nT}\sum_{j,\,t\neq t'} z_{j,t}z_{j,t'},$$

или в первоначальных обозначениях

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{nT(T-1)}\sum_{j,\,t\neq t'} z_{j,t}z_{j,t'},$$
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{nT}\Big[\sum_{j,t} z_{j,t}^2 - \frac{1}{T-1}\sum_{j,\,t\neq t'} z_{j,t}z_{j,t'}\Big].$$

Доказательство леммы 1. В силу условий леммы

$$c_{i,m} = \begin{cases}\omega_i + o(\omega), & i = m,\\ o(\omega), & i \neq m,\end{cases} \quad \omega = \max_i \omega_i, \quad \omega_i = \Big(\sum_{j,t} x_{i,j,t}^2\Big)^{-1},$$

поэтому имеем

$$M\sum_{j,t} z_{j,t}^2 = \sigma^2(nT-k) + \sigma_0^2\Big[nT - 2\sum_{i,m} c_{i,m}\sum_{j,t,s} x_{i,j,t}x_{m,j,s} + $$
$$+\sum_{r,j,t}\Big(\sum_{i,m,s} c_{i,m}\,x_{i,j,t}\,x_{m,r,s}\Big)^2\Big] = \sigma^2(nT-k) + \sigma_0^2\Big(nT - \sum_{i,j,t,s}\omega_i x_{i,j,t}x_{i,j,s} + $$
$$+\sum_{i,i',j,r,t,t',s,s'}\omega_i\omega_{i'}x_{i,j,t}x_{i,r,s}x_{i,j,t'}x_{i',r,s}\Big] = \sigma^2(nT-k) + $$
$$+\sigma_0^2\Big[nT - \sum_{i,j,t,s}\omega_i x_{i,j,t}x_{i,j,s}\Big] + o(\omega) = \sigma^2(nT-k) + \sigma_0^2(nT+B_1) + o(\omega)$$

и аналогично

$$M\sum_{j,t\neq t'} z_{j,t}z_{j,t'} = -\sigma^2\sum_{i,m} c_{i,m}\sum_{j,t\neq t'} x_{i,j,t}x_{m,j,t'} + \sigma_0^2\Big[nT(T-1) -$$

$$-\sum_{j,t\neq t',i,m,s} c_{i,m}x_{m,j,s}(x_{i,j,t}+x_{i,j,t'}) + \sum_{t,r,t\neq t'}\Big(\sum_{i,m,s} x_{m,r,s}c_{i,m}x_{i,j,t}\Big)\times$$

$$\times\Big(\sum_{i,m,s} x_{m,r,s}c_{i,m}x_{i,j,t}\Big)\Big] = \sigma^2\sum_{i,j,t\neq t'} \omega_i x_{i,j,t}x_{i,j,t'} + \sigma_0^2\Big[nT(T-1) -$$

$$-2(T-1)\sum_{i,j,s,t}\omega_i x_{i,j,t}x_{i,j,t'} + \sum_{i,i'}\omega_i\omega_{i'}\sum_{r,s,s'} x_{i,r,s'}x_{i,r,s}\sum_{j,t\neq t'} x_{i,j,t}x_{i',j,t'}\Big] +$$

$$+o(\omega) = \sigma^2 A_2 + \sigma_0^2[nT(T-1)+B_2] + o(\omega).$$

Вследствие неравенства Коши — Буняковского (см., например, [6, стр. 24])

$$\Big|\sum_{j,t,s} x_{i,j,t}x_{i,j,s}\Big| \leqslant T\sum_{j,t} x^2_{i,j,t},$$

$$\Big|\sum_{r,s,s'} x_{i',r,s'}x_{i,r,s}\Big| \leqslant T\sum_{r}\sqrt{\sum_{s} x^2_{i,j,s}\sum_{s} x^2_{i',j,s}},$$

поэтому $|B_1| \leqslant kT$, $|A_2| \leqslant k(T-1)$, $|B_2| \leqslant 2(T-1)T + k^2T^2$, и лемма доказана.

Доказательство леммы 2. Прежде всего находим

$$M\xi_{j,t}\xi_{j,t'}\xi_{r,s}\xi_{r,s'} =$$
$$= (1+2\delta_{j,r})\sigma_0^4 + [\delta_{s,s'} + \delta_{t,t'} + \delta_{j,r}(\delta_{t,s}+\delta_{t,s'}+\delta_{t',s}+\delta_{t',s'})]\sigma_0^2\sigma^2 +$$
$$+\{(1-\delta_{j,r})\delta_{t,t'}\delta_{s,s'} + \delta_{j,r}[(1-\delta_{t,s})\delta_{t,t'}\delta_{s,s'} + (1-\delta_{t,t'})\delta_{t,s}\delta_{t',s'} + \quad (8)$$
$$+(1-\delta_{s,s'})\delta_{t,s'}\delta_{t',s} + 3\delta_{t,s}\delta_{t,t'}\delta_{s,s'}]\}\sigma^4.$$

Используя (8), получаем

$$M\sum_{j,r,t,s}\xi^2_{j,t}\xi^2_{r,s} = n^2T^2\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)\sigma_0^4 + 2\left(1+\frac{2}{nT}\right)\sigma_0^2\sigma^2 + \left(1+\frac{2}{nT}\right)\sigma^4\right],$$

$$M\frac{1}{T-1}\sum_{j,r,t,s\neq s'}\xi^2_{j,t}\xi_{r,s}\xi_{r,s'} = n^2T^2\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)\sigma_0^4 + \left(1+\frac{4}{nT}\right)\sigma_0^2\sigma^2\right],$$

$$M\frac{1}{(T-1)^2}\sum_{j,r,t\neq t',s\neq s'}\xi_{j,t}\xi_{j,t'}\xi_{r,s}\xi_{r,s'} =$$

$$= n^2T^2\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)\sigma_0^4 + \frac{4}{nT}\sigma_0^2\sigma^2 + \frac{2}{nT(T-1)}\sigma^4\right],$$

поэтому

$$D\sigma_0^{*2} = \frac{1}{n^2T^2(T-1)^2}M\Big(\sum_{j,t\neq t'}\xi_{j,t}\xi_{j,t'}\Big) - \sigma_0^4 =$$

$$= \frac{2}{n}\sigma_0^4 + \frac{4}{nT}\sigma_0^2\sigma^2 + \frac{2}{nT(T-1)}\sigma^4.$$

Аналогично

$$D\sigma^{*2} = \frac{1}{n(T-1)}\sigma^4.$$

Доказательство леммы 3. По условию (3′)

$$\widetilde{z}_{j,t} = y_{j,t} - \sum_i \widetilde{\beta}_i x_{i,j,t} = \xi_{j,t} - \sum_{i,j_1,t_1} \omega_i x_{i,j,t} x_{i,j_1,t_1} \xi_{j_1,t_1} + o(\omega) = \xi_{j,t} - \Delta_{j,t} + o(\omega),$$

при этом использовано обозначение $\omega_i = \left(\sum_{j,t} x_{i,j,t}^2\right)^{-1}$. Имеем

$$M(\widetilde{\sigma}_0^2)^2 = \frac{1}{n^2T^2(T-1)^2} \sum_{j,r,t\neq t',s\neq s'} M\widetilde{z}_{j,t}\widetilde{z}_{j,t'}\widetilde{z}_{r,s}\widetilde{z}_{r,s'} =$$

$$= \frac{1}{n^2T^2(T-1)^2} \sum_{j,r,t\neq t',s\pm s'} M(\xi_{j,t} - \Delta_{j,t})(\xi_{j,t'} - \Delta_{j,t'})(\xi_{r,s} - \Delta_{r,s}) \times$$

$$\times (\xi_{r,s'} - \Delta_{r,s'}) + o(\omega).$$

Чтобы не приводить громоздких выкладок, выполним оценку только одного из 16 членов этой суммы (еще один ее член вычислен в лемме 2), оценка остальных проводится подобным же образом. Итак,

$$\sum_{j,r,t\neq t',s\neq s'} M\Delta_{j,t}\xi_{j,t'}\xi_{r,s}\xi_{r,s'} = \sum_{i,j_1,t_1,j,r,t\neq t',s\neq s'} \omega_i x_{i,j,t} x_{i,j_1,t_1} M\xi_{j_1,t}\xi_{j,t}\xi_{r,s}\xi_{r,s'} =$$

$$= \sum_{i,j,t,t_1} \omega_i x_{i,j,t} x_{i,j,t_1} \sum_{r,s\neq s',t\neq t'} \{(1+2\delta_{j,r})\sigma_0^4 + [\delta_{s,s'} + \delta_{t,t'} +$$

$$+ \delta_{j,r}(\delta_{t_1,s} + \delta_{t_1,s'} + \delta_{t',s} + \delta_{t',s'})]\sigma^2\sigma_0^2 + (1-\delta_{j,r})\delta_{t,t'}\delta_{s,s'}\sigma^4 +$$

$$+ \delta_{j,r}[(1-\delta_{t_1,s})\delta_{t_1,t'}\delta_{s,s'} + (1-\delta_{t,t'})\delta_{t_1,s}\delta_{t',s} + (1-\delta_{s,s'})\delta_{t_1,s'}\delta_{t',s} +$$

$$+ 3\delta_{t_1,s}\delta_{t_1,t'}\delta_{s,s'}]\sigma^4\} = [nT^3\sigma_0^4 + nT^2\sigma_0^2\sigma^2 + O(T^2)] \sum_{i,j,t,t_1} \omega_i x_{i,j,t} x_{i,j,t}.$$

При этом использовался лишь один факт

$$M\xi_{j_1,t_1}\xi_{j,t'}\xi_{r,s}\xi_{r,s'} = \delta_{j,j_1} M\xi_{j,t_1}\xi_{j,t'}\xi_{r,s}\xi_{r,s'}.$$

Из последнего равенства получаем

$$\frac{1}{n^2T^2(T-1)^2} \sum_{j,r,t\neq t',s\neq s'} M\Delta_{j,t}\xi_{j,t'}\xi_{r,s}\xi_{r,s'} =$$

$$= \frac{1}{n} \frac{\sum_j \left(\sum_t x_{i,j,t}\right)^2}{T\sum_{j,t} x_{i,j,t}^2} + O\left(\frac{1}{nT}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Остальные 14 сумм, содержащих члены с сомножителями Δ, аналогичным образом получают такую же оценку $O(1/n)$. Применяя теперь результаты лемм 1 и 2, имеем окончательно $D\sigma_0^2 = O(1/n)$. Подобным же образом $D\sigma^2 = O(1/n)$.

Доказательство леммы 4. Вначале с помощью условия (3′) найдем главные члены разложения $\widetilde{\gamma}_{i,i}$ (напоминаем

$$p = \frac{1}{T}\omega_i \sum_j \left(\sum_i x_{i,j,t}\right)^2 \omega_i = \left(\sum_{j,t} x_{i,j,t}^2\right)^{-1},$$

$$\widetilde{\gamma}_{i,i} = \sigma^2 c_{i,i} + \sigma_0^2 \sum_{k,l,j,t,t'} c_{i,k} x_{k,j,t} x_{l,j,t'} c_{l,i} \approx \omega_i(\sigma^2 + \sigma_0^2 Tp).$$

Перейдем теперь к нахождению главных членов разложения $\hat{\gamma}_{i,i}$. Прежде всего докажем, что норма матрицы $\Phi = \theta C X^* e X$ меньше единицы. Вследствие условий (3′), (5′) матрица $\Phi = \|\varphi_{i,m}\|$ имеет структуру

$$\varphi_{i,i} = \theta \sum_{l,j,t,t'} c_l x_{l,j,t} x_{i,j,t'} \approx \theta c_{i,i} \sum_j \Big(\sum_t x^2_{i,j,t}\Big)^2 \approx \theta T p;$$

$$\varphi_{i,m} = \theta \sum_{l,j,t,t'} c_{i,l} x_{l,j,t} x_{m,j,t} \approx \theta\omega_i \sum_j \Big(\sum_i x_{i,j,t}\Big)\Big(\sum_t x_{m,j,t}\Big) = \theta\,(\sqrt{\varphi_{i,i}\,\varphi_{m,m}}),$$

причем

$$\varphi_{i,m}\varphi_{m,i} \approx \theta^2 \Big[\omega_1 \sum_j \Big(\sum_t x_{i,j,t}\Big)\Big(\sum_t x_{m,j,t}\Big)\Big]^2 \geqslant 0.$$

Имеем

$$f(\lambda) = \det(\Phi - \lambda E) \approx \prod_i (\varphi_{i,i} - \lambda) - \sum_{i-1}^{k-1} \sum_{m>i} \varphi_{i,m}\varphi_{m,i} \prod_{l\neq i,m} \varphi_{l,l},$$

и пусть $\varphi_{1,1} \leqslant \varphi_{2,2} \leqslant \ldots \leqslant \varphi_{k,k}$ (этого можно добиться перенумерацией), тогда

$$f(0) = \prod_i \varphi_{i,i} - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{m>1} \varphi_{i,m}\varphi_{m,i} \prod_{l\neq i,m} \varphi_{l,l} = \prod_i \varphi_{i,i}\,[1 - o(\omega^2)] > 0,$$

и

$$f(\varphi_{1.1}) = -\sum_{m=2}^{k} \varphi_{i,m}\varphi_{m,i} \prod_{l\neq i,m} (\varphi_{l,l} - \varphi_{i,i}) < 0.$$

Таким образом, матрица Φ имеет собственное значение λ $(0 \leqslant \lambda < \varphi_{1,1} \leqslant 1)$, тем самым норма матрицы Φ меньше единицы.

Теперь, согласно леммам 2,3, $\tilde{\sigma}^2 \approx \sigma^2$, $\tilde{\sigma}_0{}^2 = \sigma_\theta{}^2$; $\tilde{\gamma} = \sigma^2(X^*X - \theta X^*eX)^{-1} = \sigma^2[X^*X(E - \theta CX^*eX)]^{-1} = \sigma^2(E - \Phi)^{-1}C$.

Поскольку норма Φ меньше единицы, то согласно теореме 8 работы [6, стр. 126]

$$(E - \Phi)^{-1} = E + \Phi + \Phi^2 + \ldots,$$

поэтому

$$\tilde{\gamma} = \sigma^2[C + \theta CX^*eXC + \theta^2(CX^*eX)^2C + \ldots].$$

Применяя (3′), (5′), получаем

$$\hat{\gamma}_{i,i} = \sigma^2\Big(c_{i,i} + \theta \sum_{l,\mu,j,t,t'} c_{i,l} x_{l,j,t} x_{\mu,j,t'}, c_{\mu,i} + \cdots\Big) \approx$$

$$\approx \sigma^2\Big[c_{i,i} + \theta c^2_{i.i} \sum_j \Big(\sum_t x_{i,j,t}\Big)^2 + \cdots\Big] \approx \omega_i\,[\sigma^2 + \sigma^2\theta\,Tp\,(1 + \theta Tp + \cdots)] \approx$$

$$\approx \omega_i\left(\sigma^2 + \frac{\sigma^2\theta Tp}{1 - \theta Tp}\right) = \omega_i\left(\sigma^2 + \frac{\sigma_0{}^2 Tp}{1 + Tq\sigma_0{}^2/\sigma^2}\right).$$

Лемма доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Д. Хеннан. Анализ временных рядов. М., «Наука», 1964.
2. Э. Хеди, Д. Диллон. Производственные функции в сельском хозяйстве. М., «Прогресс», 1965.
3. Г. Крамер. Математические методы статистики. М., Изд-во иностр. лит., 1948.
4. С. А. Айвазян, Ю. А. Розанов. Некоторые замечания к асимптотически эффективным линейным оценкам коэффициентов регрессии. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1964, т. 71.
5. Б. Л. ван дер Варден. Математическая статистика. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
6. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Изд-во Моск. ун-та, 1954.

Поступила в редакцию
11 X 1968